Imad Odeh

الرياضيات

MATHEMATICS

الصف الثاني عشر متقدم

12 Advanced

ملخص دروس الفصل الأول

T1

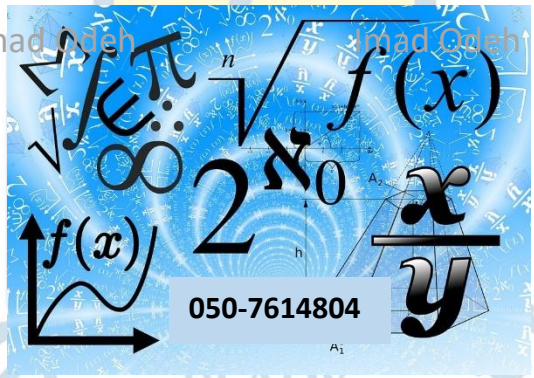
Chapter (2) الوحدة

النهايات والاتصال

2025-2026

الاستاذ عماد عودة

Mr. IMAD ODEH



Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
Imad Odeh
Imad Odeh

اسم الطالب: -

الطلاب الأعزاء

في بداية العام الدراسي الجديد أود الترحيب بكم جميعا متمنيا لكم التوفيق واسأل الله ان تعينكم هذه الملزمة على تحقيق أفضل النتائج في امتحانات الثانوية العامة وفي جميع أمور حياتكم

في البداية تم اعداد هذه الملزمة بشكل يساعدكم على الوصول على جميع الأفكار والاسئلة والتمارين الواردة في الكتاب المدرسي الذي يمثل المرجع الأساسي للجميع في المذاكرة والمراجعة حيث تم وضع الأسئلة حسب الهيكل المعتمد في السنوات السابقة بالإضافة الى أسئلة السنوات الخمس السابقة والتي من شأنها ان تساعدكم في الاستعداد لامتحاناتكم خلال الفصل الدراسي بحيث تضمن لمن يستطيع حل جميع الأسئلة الحصول على أفضل الدرجات بإذن الله تعالى.

كما ان هذه الأسئلة وضعت لتناسب جميع مستويات الطلبة بحيث يستطيع الطالب المتميز حل الأسئلة لضمان تفوقه والطالب المتوسط يستطيع حل أكبر عدد من الأسئلة لضمان حصوله على أفضل الدرجات.

تم تقسيم الملزمة حسب دروس الكتاب وأضافه أسئلة السنوات السابقة مع عدد من الأسئلة ذات المهارات العليا التي تساعدكم على فهم الدروس بشكل مميز وأكثر عمقا. تم حل بعض الأمثلة وتوضيح طرق الحل بالآلة الحاسبة لبعض منها

كما ان هناك عدد من الأسئلة وضعت فقط لتحدي قدرات الطلبة وفي حال واجهت صعوبة في حلها بإمكانك مناقشتها مع زملائك ومعلمك او الاطلاع على ملزمة الحل للحصول على الحلول الصحيحة ومن ثم متابعة حل بقية الأسئلة

تم أعداد هذه الملزمة باللغتين العربية والانجليزية لتناسب جميع الطلبة

سيتم الحاق ملزمة اختبر نفسك لكل درس من دروس الكتاب ليساعدكم على اختبار قدراتكم وفقا لأسئلة الاختبار

في حال وجد هناك أي خطأ مطبعي ارجو التواصل للتعديل

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

اسأل الله ان يوفقكم جميعا

الفصل الاول
Trimester 1

الوحدة Chapter	الدرس Lesson
Limits and Continuity	2-1 A Brief Preview of Calculus: Tangent Lines and the Length of a Curve
	2-2 The Concept of Limit
	2-3 Computation of Limits
	2-4 Continuity and Its Consequences
	2-5 Limits Involving Infinity; Asymptotes

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Lesson 2-1

A BRIEF PREVIEW OF CALCULUS:
TANGENT LINES AND THE LENGTH OF A CURVE
مراجعة موجزة عن التفاضل والتكامل
المماسات وطول المنحنى

$$\text{Slope} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \text{الميل}$$

Solved Example	مثال محلول

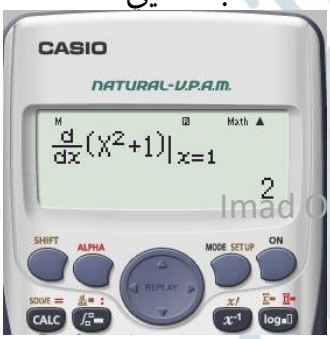
Estimate the slope of

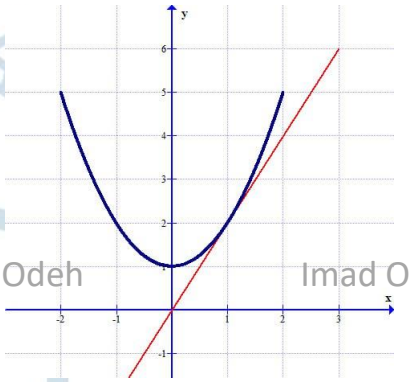
قدر ميل المنحنى ل

$$y = x^2 + 1 \quad at\ x = 1$$

في حال كان هذا السؤال اختيار من متعدد (ضع دائرة) من

الممكن حله بالآلة الحاسبة كما يلي





Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

وفي حال كان سؤال حل كتابي يتم حله بالخطوات التالية

أولا: - نوجد قيمة y عندما $x = 1$

$$x = 1\ , y = (1)^2 + 1 = 2$$

اي نحتاج دراسة ميل عندما نقترب من النقطة $(1, 2)$

ثانيا: - نختار نقطتين قريبتين منها ومن ثم نقوم بحساب الميل كلما اقتربنا من النقطة المطلوبة

نبدأ من اليسار عند النقطة $(0,1)$

ومن اليمين عند النقطة $(2,5)$

ثالثا نقوم بحساب الميل كلما اقتربنا من النقطة المطلوبة باستخدام قانون الميل $m_{sec} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

والجدول التالي او اي طريقة اخرى

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Point	(1,2) , (2,5)	(1,2) , (1.1,2.21)	(1,2) , (1.01,2.0201)	*slope at* $x = 1$	(1,2) , (0.99,1.9801)	(1,2) , (0.9,1.81)	(1,2) , (0,1)
$m_{sec} =$	$\frac{5-2}{2-1} = 3$	$\frac{2.21-2}{1.1-1} = 2.1$	$\frac{2.0201-2}{1.01-1} = 2.01$		$\frac{1.9801-2}{0.99,1-1} = 1.99$	$\frac{1-1.81}{0.9-1} = 1.9$	$\frac{1-2}{0-1} = 1$

2

من الجدول السابق نلاحظ انه كلما اقتربنا من النقطة $(1, 2)$من اليسار ومن اليمين فان ميل القاطع يقترب من العدد 2 وعليه فان ميل المنحنى $y = x^2 + 1$ عند $x = 1$ يساوي 2

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

أسئلة وتمارين Exercise

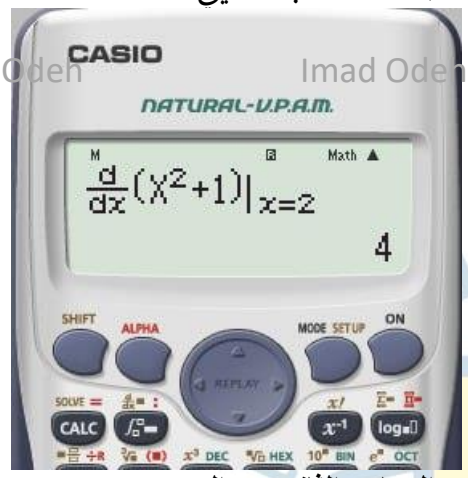
Solved Exercise	سؤال محلول

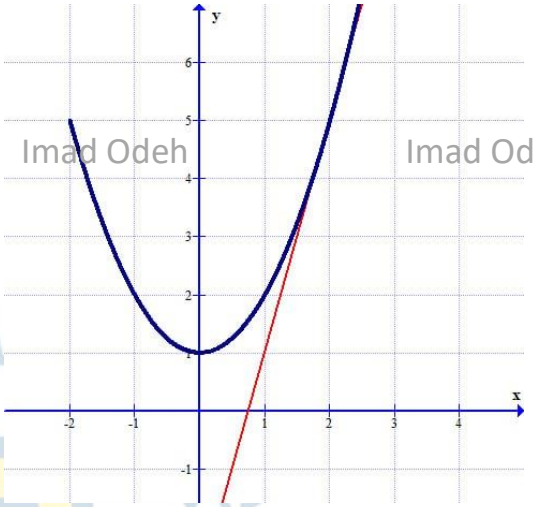
Q1 Estimate the slope of

س1 قدر ميل المنحنى ل

$$y = x^2 + 1 \qquad a = 2$$

في حال كان هذا السؤال اختيار من متعدد (ضع دائرة) من الممكن حله بالآلة الحاسبة كما يلي





بالامكان استخدام جدولين منفصلين الاول لحساب قيمة الميل كلما اقتربنا من اليسار والثاني من اليمين

النقطة المطلوب حساب الميل عندها تكون $(x, y) = (2, 5)$ $\longrightarrow$ $y = (2)^2 + 1 = 5$ $\longrightarrow$ $x = 2$

اليسار

Second point	$m_{sec} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
(1,2)	$\frac{2-5}{1-2} = 3$
(1.9,4.61)	$\frac{4.61-5}{1.9-2} = 3.9$
(1.99,4.9601)	$\frac{4.9601-5}{1.99-2} = \mathbf{3.99}$

اليمين

Second point	$m_{sec} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
(3,10)	$\frac{10-5}{3-2} = 5$
(2.1,5.41)	$\frac{5.41-5}{2.1-2} = 4.1$
(2.01,5.0401)	$\frac{5.04101-5}{2.01-2} = \mathbf{4.101}$

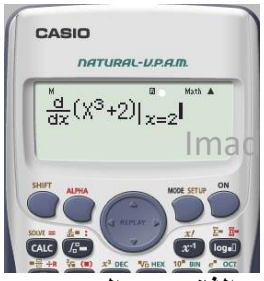
نلاحظ من كلا الجدولين انه كلما اقتربنا من النقطة (2,5)من اليمين واليسار فان قيمة الميل تقترب من العدد 4

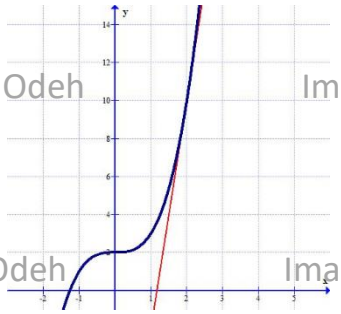
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q2 Estimate the slope of س2 قدر ميل المنحنى ل

$$y = x^3 + 2 \qquad a = 2$$

في حال كان هذا السؤال اختيار من متعدد (ضع دائرة) من الممكن حله بالآلة الحاسبة كما يلي





بالإمكان استخدام جدولين منفصلين الاول لحساب قيمة الميل كلما اقتربنا من اليسار والثاني من اليمين

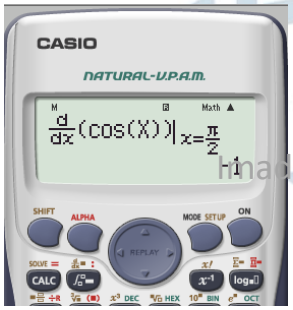
النقطة المطلوب حساب الميل عندها تكون $(x,y) = (2,10)$ $\longrightarrow$ $y = (2)^3 + 2 = 10$ $\longrightarrow$ $x = 2$

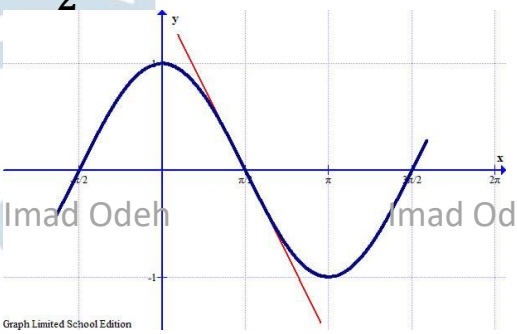
Second point	$m_{sec} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
(3,29)	

Second point	$m_{sec} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$
(1,3)	

Q3 Estimate the slope of س3 قدر ميل المنحنى ل

$$y = \cos x \qquad a = \frac{\pi}{2}$$



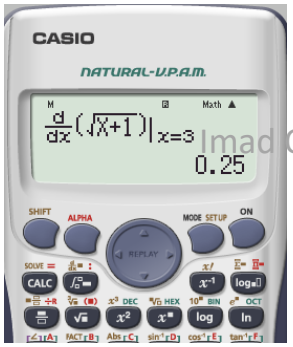


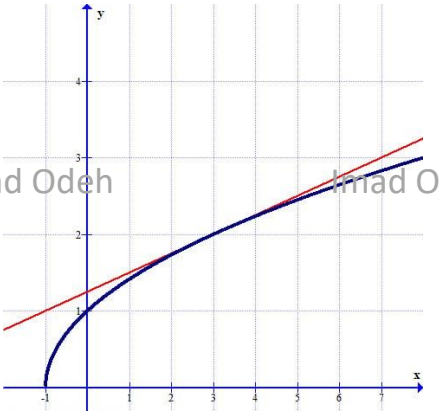
Second point	$m_{sec} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Second point	$m_{sec} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Q4 Estimate the slope of س4 قدر ميل المنحنى ل

$$y = \sqrt{x+1} \quad a = 3$$



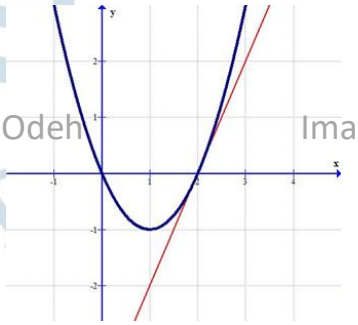


Second point	$m_{sec} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Second point	$m_{sec} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Q5 Estimate the slope of س5 قدر ميل المنحنى ل

$$f(x) = x^2 - 2x \quad , \quad a = 2$$



Second point	$m_{sec} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Second point	$m_{sec} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Imad Odeh

تمارين واسئلة

Q1 Estimate the slope of

س1 قدر ميل المنحنى ل

$$y = x^2 + 1 \quad at\ x = -2$$

A) 5
B) 4
C) -4
D) 2

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q2 Estimate the slope of

س2 قدر ميل المنحنى ل

$$y = \sqrt{x+1} \quad a = 0$$

A) 2
B) 4
C) $\frac{1}{4}$
D) $\frac{1}{2}$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

تقدير طول المنحنى Length of a Curve

Distance between two points $a(x_1, y_1)$ and $b(x_2, y_2)$

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Solved Example — مثال محلول

Q1 Estimate the length of the curve on the given interval

س1 قدر طول القوس في الفترة المعطاة

$$y = (x-1)^2, \quad 0 \le x \le 3$$

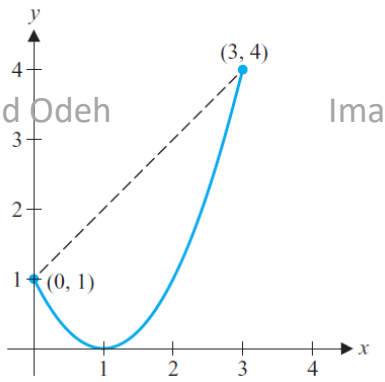
Using $n = 1$ line segments

باستخدام $n = 1$ من القطع المستقيمة

وعليه نحتاج الى حساب المسافة بين النقطتين

$d_2 = d\{(0,1),(3,4)\}$

نطبق قانون المسافة بين نقطتين على القطعة



Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$d = \sqrt{(3-0)^2 + (4-1)^2}$$
$$d = \sqrt{(3)^2 + (3)^2}$$
$$d = \sqrt{9+9}$$
$$d = \sqrt{18}$$
$$d = 3\sqrt{2} \approx 4.24264$$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Solved Example	مثال محلول

Q2 Estimate the length of the curve on the given interval

س2 قدر طول القوس في الفترة المعطاة

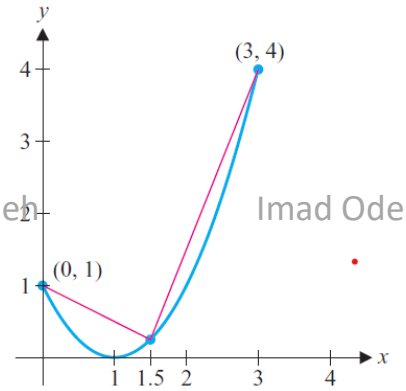
$$y = (x-1)^2 \ , \quad 0 \le x \le 3$$

Using $n = 2$ line segments

باستخدام $n = 2$ من القطع المستقيمة

نقسم الفترة $[0,3]$الى فترات جزئية طول كل منها

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3-0}{2} = 1.5$$



وعليه نحتاج الى حساب مجموع القطعتين المستقيمتين كما يلي

$$d_2 = \boldsymbol{d}\{(0,1),(1.5,0.25)\} + \boldsymbol{d}\{(1.5,0.25),(3,4)\}$$

نطبق قانون المسافة بين نقطتين على كل قطعة من القطع

$$\boldsymbol{d} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$
$$d_2 = \sqrt{(1.5-0)^2+(0.25-1)^2} + \sqrt{(3-1.5)^2+(4-0.25)^2}$$
$$d_2 = \sqrt{(1.5)^2+(-0.75)^2} + \sqrt{(1.5)^2+(3.75)^2}$$
$$d_2 \approx 5.71592$$

Solved Example	مثال محلول

Q3 Estimate the length of the curve on the given interval

س3 قدر طول القوس في الفترة المعطاة

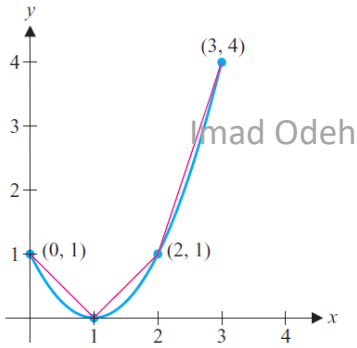
$$y = (x-1)^2 \ , \quad 0 \le x \le 3$$

Using $n = 3$ line segments

باستخدام $n = 3$ من القطع المستقيمة

نقسم الفترة $[0,3]$الى فترات جزئية طول كل منها

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3-0}{3} = 1$$



وعليه نحتاج الى حساب مجموع القطع المستقيمة الثلاث كما يلي

$$d_3 = \boldsymbol{d}\{(0,1),(1,0)\} + \boldsymbol{d}\{(1,0),(2,1)\} + \boldsymbol{d}\{(2,1),(3,4)\}$$
$$\boldsymbol{d} = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$
$$d_3 = \sqrt{(1-0)^2+(0-1)^2} + \sqrt{(2-1)^2+(1-0)^2} + \sqrt{(3-2)^2+(4-1)^2}$$
$$d_3 = \sqrt{(1)^2+(-1)^2} + \sqrt{(1)^2+(1)^2} + \sqrt{(1)^2+(3)^2}$$
$$d_3 = \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{10} \approx 5.99070$$

Solved Example	مثال محلول

Q4 Estimate the length of the curve

س4 قدر طول القوس في الفترة المعطاة

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

$$y = \sin x \quad for\ 0 \le x \le \pi$$

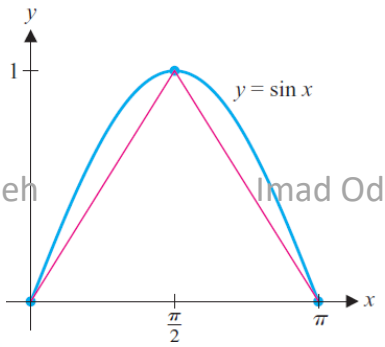
Using $n = 2$ *line segments*

باستخدام $n = 2$ من القطع المستقيمة

قسم الفترة $[0,\pi]$ الى فترات جزئية طول كل منها

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{\pi - 0}{2} = \frac{\pi}{2}$$

وعليه نحتاج الى حساب مجموع القطعتين المستقيمتين كما يلي



Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

$$d_2 = d\left\{(0,0),\left(\frac{\pi}{2},1\right)\right\} + d\left\{\left(\frac{\pi}{2},1\right),(\pi,0)\right\}$$

نطبق قانون المسافة بين نقطتين على كل قطعة من القطع

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d_2 = \sqrt{\left(\frac{\pi}{2} - 0\right)^2 + (1-0)^2} + \sqrt{\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right)^2 + (0-1)^2}$$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

$$d_2 = \sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + (1)^2} + \sqrt{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + (1)^2} = 2\sqrt{\frac{\pi^2}{4} + 1} \approx 3.7242$$

Solved Example	مثال محلول

Q5 Estimate the length of the curve

س5 قدر طول القوس في الفترة المعطاة

$$y = \sin x \quad for\ 0 \le x \le \pi$$

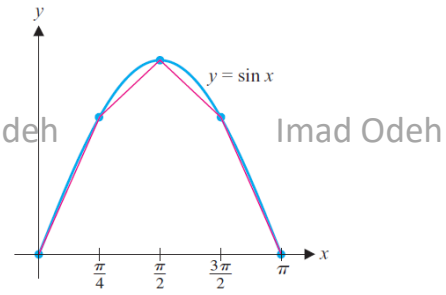
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Using $n = 4$ *line segments*

باستخدام $n = 4$ من القطع المستقيمة

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

نقسم الفترة $[0,\pi]$ الى فترات جزئية طول كل منها



Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{\pi - 0}{4} = \frac{\pi}{4}$$

وعليه نحتاج الى حساب مجموع القطع المستقيمة الاربع كما يلي

$$d_4 = d\left\{(0,0),\left(\frac{\pi}{4},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\} + d\left\{\left(\frac{\pi}{4},\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\left(\frac{\pi}{2},1\right)\right\} + d\left\{\left(\frac{\pi}{2},1\right),\left(\frac{3\pi}{4},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\} + d\left\{\left(\frac{3\pi}{4},\frac{\sqrt{2}}{2}\right),(\pi,0)\right\}$$

نطبق قانون المسافة بين نقطتين على كل قطعة من القطع

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

$$d_4 = \sqrt{\left(\frac{\pi}{4}-0\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-0\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)^2+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)^2} + \sqrt{\left(\pi-\frac{3\pi}{4}\right)^2+\left(0-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

$$d_4 = \sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-1\right)^2} + \sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$$

$$d_4 = 2\sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} + 2\sqrt{\left(\frac{\pi}{4}\right)^2+\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

$d_4 \approx 3.7901$

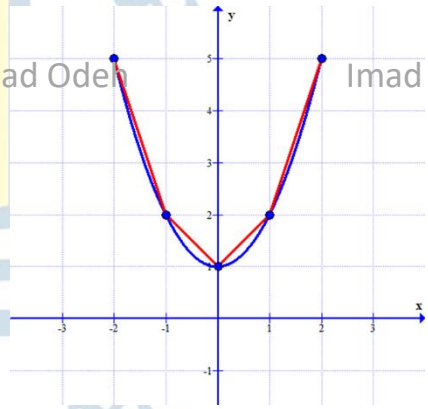
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Exercise أسئلة وتمارين

Q1	Estimate the length of the curve on the given interval	س1 قدر طول القوس في الفترة المعطاة

$$y = x^2 + 1 \ , \quad -2 \le x \le 2$$

Using $n = 4$ *line segments* باستخدام $n = 4$ من القطع المستقيمة



Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q2	Estimate the length of the curve on the given interval	س2	قدر طول القوس في الفترة المعطاة

$$y = \cos x \ , \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$$

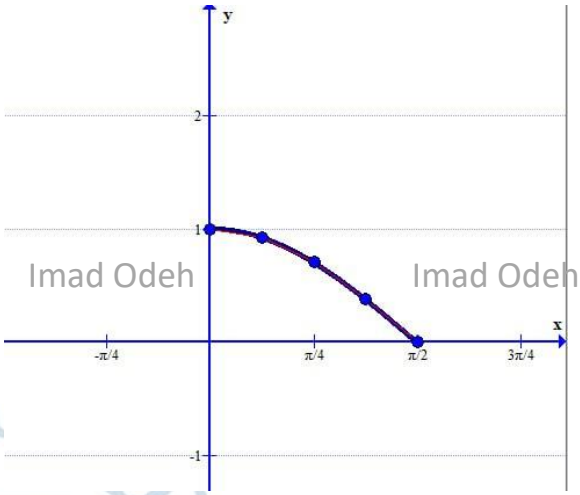
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Using $n = 4$ *line segments*

باستخدام $n = 4$ من القطع المستقيمة

نقسم الفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$ الى فترات جزئية طول كل منها

$$\frac{b-a}{n} = \frac{\frac{\pi}{2} - 0}{4} = \frac{\pi}{8}$$



Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q3	Estimate the length of the curve on the given interval	س3	قدر طول القوس في الفترة المعطاة

$$y = \sin x \ , \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Using $n = 2$ *line segments*

باستخدام $n = 2$ من القطع المستقيمة

نقسم الفترة $[0, \frac{\pi}{2}]$ الى فترات جزئية طول كل منها

$$\frac{b-a}{n} = \frac{\frac{\pi}{2} - 0}{2} = \frac{\pi}{4}$$

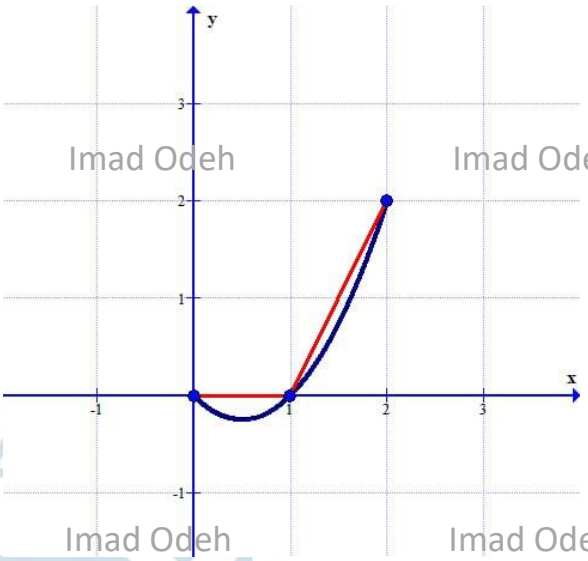
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q4	Estimate the length of the curve on the given interval	قدر طول القوس في الفترة المعطاة	س4

$$y = x^2 - x \ , \quad 0 \le x \le 2$$

Using $n = 2$ *line segments* باستخدام $n = 2$ من القطع المستقيمة

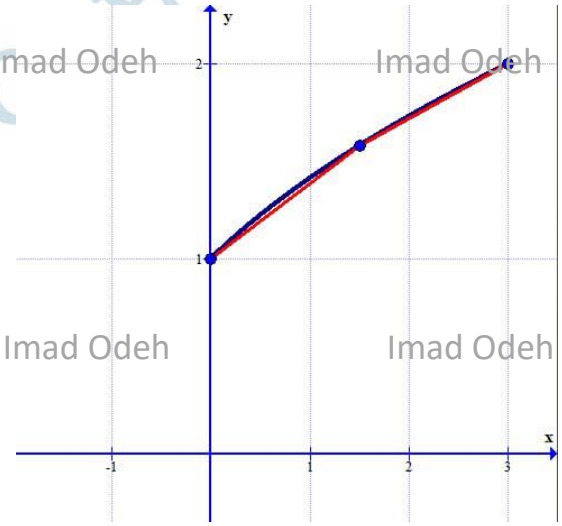


Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q5	Estimate the length of the curve on the given interval	قدر طول القوس في الفترة المعطاة	س5

$$y = \sqrt{x+1} \ , \quad 0 \le x \le 3$$

Using $n = 2$ *line segments* باستخدام $n = 2$ من القطع المستقيمة



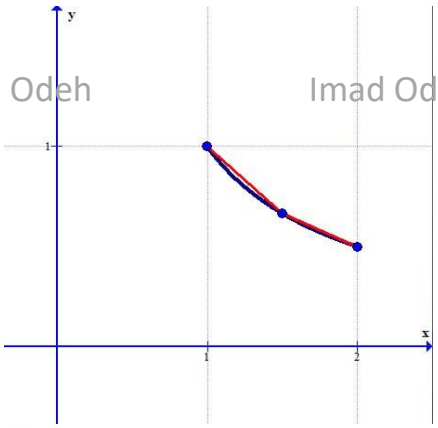
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q6	Estimate the length of the curve on the given interval	س6 قدر طول القوس في الفترة المعطاة

$$y = \frac{1}{x} \quad , \quad 1 \le x \le 2$$

Using $n = 2$ *line segments*

باستخدام $n = 2$ من القطع المستقيمة



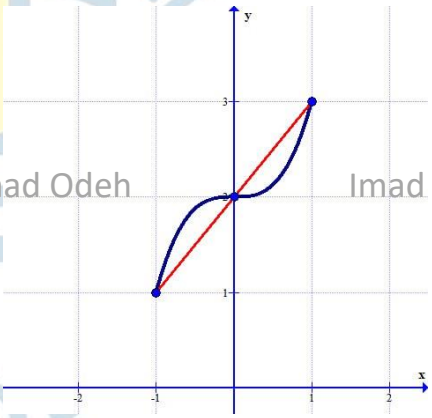
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q7	Estimate the length of the curve on the given interval	س7 قدر طول القوس في الفترة المعطاة

$$y = x^3 + 2 \quad , \quad -1 \le x \le 1$$

Using $n = 2$ *line segments*

باستخدام $n = 2$ من القطع المستقيمة



Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q8	Estimate the length of the curve on the given interval	س8 قدر طول القوس في الفترة المعطاة

$$y = x^2 - x \quad , \quad 0 \le x \le 2$$

Using $n = 2$ *line segments*

باستخدام $n = 2$ من القطع المستقيمة

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Imad Odeh

تمارين واسئلة سنوات سابقة

Q1 Estimate the length of the curve on the given interval

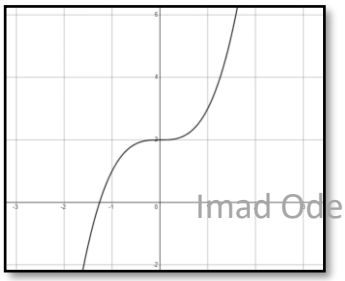
س1 قدر طول القوس في الفترة المعطاة

$$y = x^3 + 2 \quad , \quad -1 \le x \le 1$$

Using $n = 2$ *line segments*

باستخدام $n = 2$ من القطع المستقيمة

A) $2\sqrt{2}$
B) $\sqrt{2}$
C) $\sqrt{6}$
D) 2



Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q2 Estimate the length of the curve on the given interval

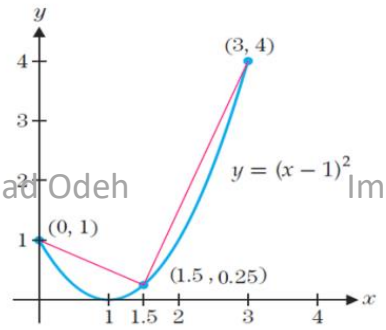
س2 قدر طول القوس في الفترة المعطاة

$$f(x) = (x-1)^2 \quad 0 \le x \le 3$$

Using $n = 2$ *line segments*

باستخدام $n = 2$ من القطع المستقيمة

A) 2.81250
B) 4.03592
C) 5.71592
D) 32.6717



Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q3 Estimate the length of the curve on the given interval

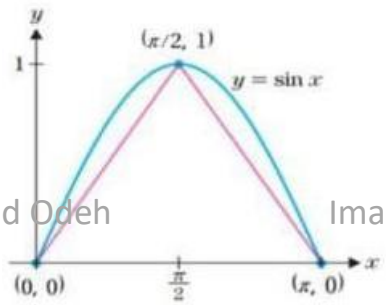
س3 قدر طول القوس في الفترة المعطاة

$$f(x) = \sin x \quad 0 \le x \le \pi$$

Using $n = 2$ *line segments*

باستخدام $n = 2$ من القطع المستقيمة

A) 4.9348
B) 1.8620
C) 3.7242
D) 6.9348



Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q4 Estimate the length of the curve on the given interval

س4 قدر طول القوس في الفترة المعطاة

$$f(x) = x^2 - 4 \quad 0 \le x \le 2$$

Using $n = 2$ *line segments*

باستخدام $n = 2$ من القطع المستقيمة

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

A) $10\sqrt{2}$

B) $\sqrt{2} + \sqrt{10}$

C) $2\sqrt{10} + \sqrt{3}$

D) $\sqrt{12}$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Imad Odeh

Lesson 2.2
مفهوم النهاية
THE CONCEPT OF LIMIT

الصيغة	تقرأ
$\lim_{x\to a} f(x) = L$	(Limit of $f(x)$, as x approaches $a = L$) نهاية الدالة $f(x)$ عندما تقترب x من a تساوي L
$\lim_{x\to 2} x^2 = 4$	(Limit of x^2, as x approaches $2 = 4$) نهاية x^2 عندما تقترب x من 2 تساوي 4

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

الصيغة	تقرأ
$\lim_{x\to a^+} f(x) = L$	(Limit of $f(x)$, as x approaches a *from right* $= L$) نهاية الدالة $f(x)$ عندما تقترب x من a من جهة اليمين تساوي L
$\lim_{x\to a^-} f(x) = L$	(Limit of $f(x)$, as x approaches a *from left* $= L$) نهاية الدالة $f(x)$ عندما تقترب x من a من جهة اليسار تساوي L

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

A limit exists if and only if both corresponding one-sided limits exist and are equal. That is,

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

$$\lim_{x\to a} f(x) = L, \text{ for some number } L, \text{ if and only if } \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L.$$

وهذا يعني انه لإيجاد نهاية دالة عند نقطة يجب ان تكون كل من النهاية من اليمين واليسار متساوية

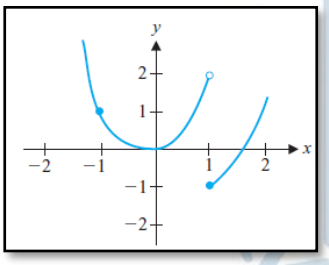
Imad Odeh

طرق ايجاد نهاية دالة عند نقطة

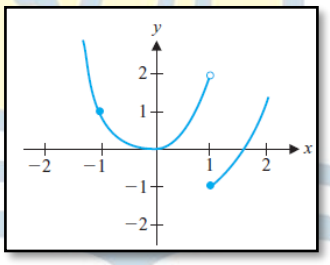
- بالتعويض المباشر Direct substitution
  - $\frac{0}{0}$
    - عمل اضافي more work
      - الضرب بالمرافق conjugate
      - التحليل جبريا Factoring
  - $\frac{\text{عدد}}{0}$
    - النهاية غير موجودة او مالانهاية في بعض الحالات
  - عدد حقيقي
- بالرسم graphically
  - فجوة النهاية موجودة
  - متصلة النهاية موجودة
  - قفزة لا يوجد نهاية

قبل البدء بدراسة وايجاد نهاية دالة عند نقطة يجب علينا تذكر ايجاد قيمة دالة عند نقطة

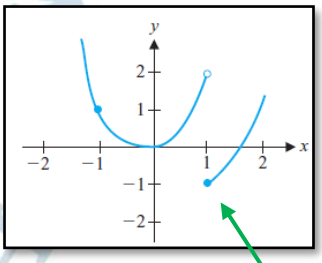
لإيجاد **قيمة الدلة** عند نقطة نحدد قيمة x على المحور الافقي ثم نوجد قيمة y المقابلة لها من المحور العمودي كما في الامثلة التالية



$f(-1) = 1$



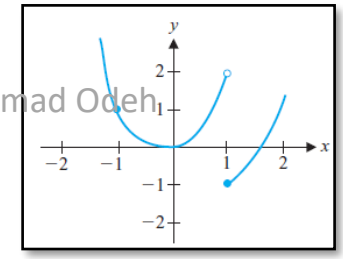
$f(0) = 0$



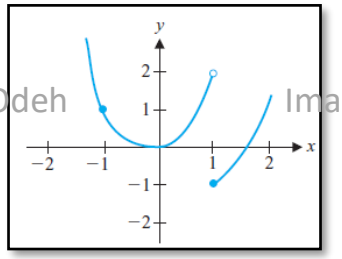
$f(1) = -1$

في حال وجود قفزة في الرسم نأخذ القيمة التي تقابل الدائرة المغلقة

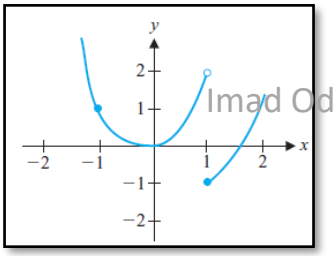
لإيجاد نهاية دالة عند نقطة نحدد قيمة x على المحور الافقي ثم ندرس قيمة y من عند الاقتراب من الجهة اليسرى والجهة اليمنى



$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2$



$\lim_{x\to 1^+} f(x) = -1$



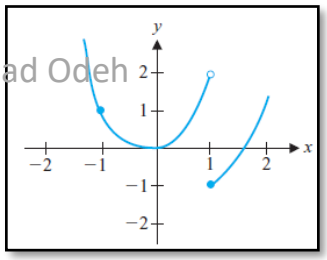
$\lim_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim_{x\to 1^+} f(x)$

$\lim_{x\to 1} f(x) = does\ not\ exiat$

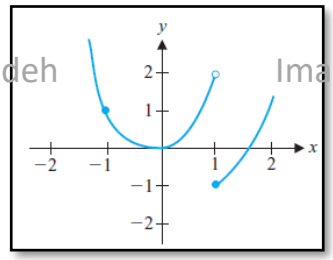
لاحظ انه لا توجد نهاية عند وجود قفزة

To find $\lim_{x\to -1} f(x)$

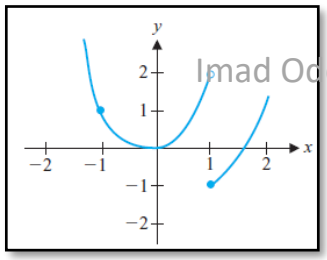
لإيجاد نهاية الدالة عند x=-1



$\lim_{x\to -1^-} f(x) = 1$



$\lim_{x\to -1^-} f(x) = 1$



$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^+} f(x)$

$\lim_{x\to -1} f(x) = 1$

النهاية موجودة لان النهاية من اليمين واليسار متساويتين

Imad Odeh

طرق ايجاد نهاية دالة عند نقطة

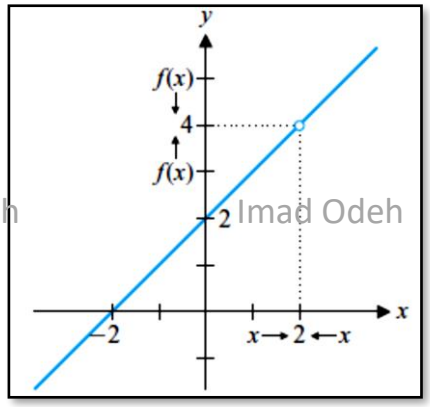
بالرسم

graphically

قفزة	متصلة	فجوة
لا يوجد نهاية	النهاية موجودة	النهاية موجودة
$\lim_{x\to a^-} f(x) \neq \lim_{x\to a^+} f(x)$	$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x)$	$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x)$

Solved example	مثال محلول

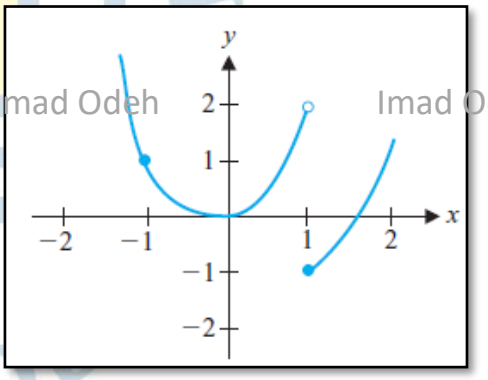
Q1 Use the graph to answer the questions. **س1 اعتمد على الرسم في الاجابة عما يليه**



1) $f(-2) = \mathbf{0}$, $f(0) = \mathbf{2}$, لا يوجد فجوات او قفزات
2) $f(2) = \boldsymbol{undefied}$ لاحظ وجود فجوة
3) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \mathbf{4}$
4) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \mathbf{4}$
النهاية من اليمين تساوي النهاية من اليسار
5) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \mathbf{4}$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

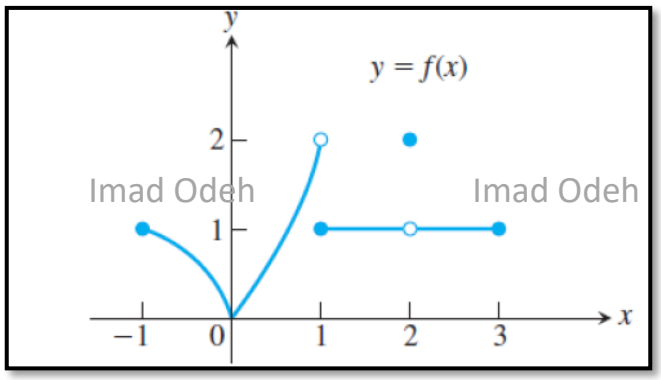
Q2 use the graph to answer the questions. **س2**



1) $f(-1) = \cdots$, $f(0) = \cdots$, $f(1) = \cdots$
2) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) =$
3) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) =$
4) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) =$
5) $\lim\limits_{x\to -1} f(x) =$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q3 use the graph to answer the questions. **س3**



1) $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) =$ .....
2) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) =$ .....
3) $\lim\limits_{x\to 1} f(x) =$ .....
4) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) =$ .....
5) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) =$ .....
6) $\lim\limits_{x\to 2} f(x) =$ .....

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

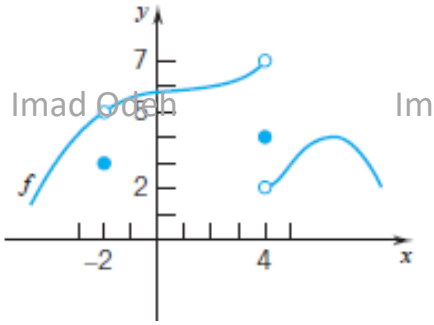
Q4 use the graph to answer the questions. **س4**

1) $\lim_{x\to 4^+} f(x) =$

2) $\lim_{x\to 4^-} f(x) =$

3) $\lim_{x\to 4} f(x) =$

4) $\lim_{x\to -2} f(x) =$



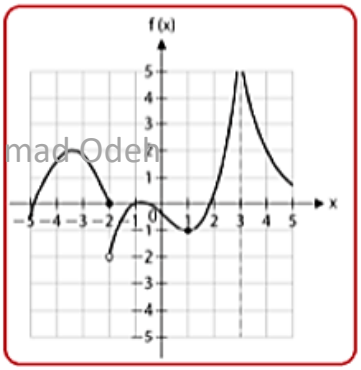
Q5 use the graph to answer the questions. **س5**

1) $\lim_{x\to -2^-} f(x) =$

2) $\lim_{x\to -2^+} f(x) =$

3) $\lim_{x\to -2} f(x) =$

4) $\lim_{x\to 3} f(x) =$



Q6 use the graph to answer the questions. **س6**

1) $\lim_{x\to -3} f(x) =$

2) $\lim_{x\to 0^-} f(x) =$

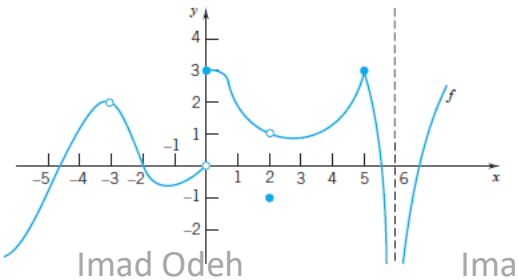
3) $\lim_{x\to 0^+} f(x) =$

4) $\lim_{x\to 2} f(x) =$

5) $\lim_{x\to 6^-} f(x) =$

6) $\lim_{x\to 6^+} f(x) =$

7) $\lim_{x\to 6} f(x) =$



Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
Imad Odeh
Imad Odeh

تمارين واسئلة سنوات سابقة

Q1 Use the graph to determine. **س1**

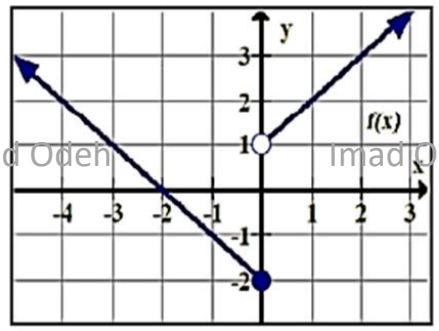
$$\lim_{x\to 0^+} f(x) =$$

A) -2

B) 0

C) 1

D) $does\ not\ exist$



Q2 Use the graph to determine. **س2**

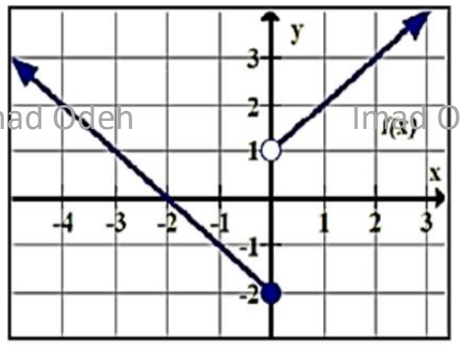
$$\lim_{x\to 0^-} f(x) =$$

A) -2

B) 0

C) 1

D) $does\ not\ exist$



Q3 Use the graph to determine. **س3**

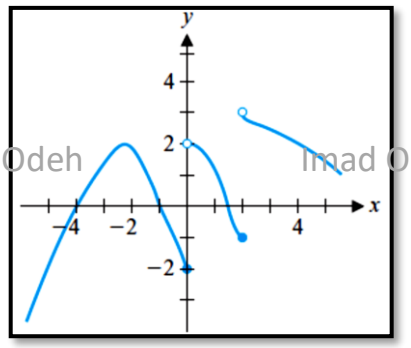
$$\lim_{x\to 2^-} f(x) =$$

A) -1

B) 2

C) 3

D) $does\ not\ exist$



Imad Odeh
Imad Odeh
Imad Odeh
Imad Odeh
Imad Odeh
Imad Odeh
Imad Odeh
Imad Odeh
Imad Odeh
Imad Odeh
Imad Odeh
Imad Odeh
12 ADV

Q4 Use the graph to determine. س4

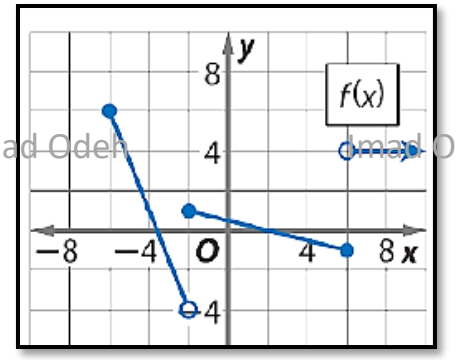
$$\lim_{x\to -2} f(x) =$$

A) 1

B) -4

C) 0

D) *does not exist*



Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q5 Use the graph to determine. س5

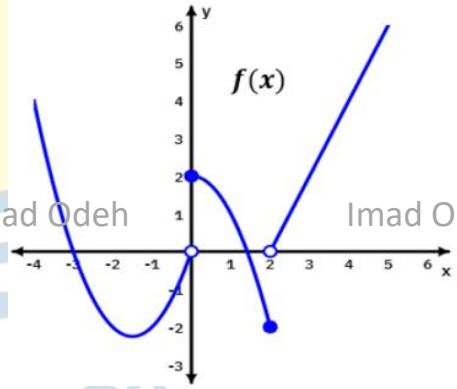
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) =$$

A) -2

B) 2

C) 0

D) 1



Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q6 Use the graph to determine. س6

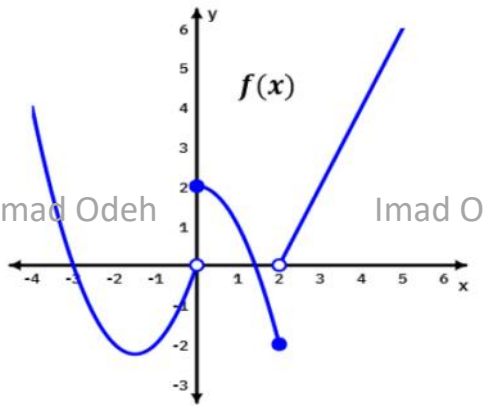
$$\lim_{x\to 2^-} f(x) =$$

A) -2

B) 2

C) 0

D) 1



Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q7 Use the graph to determine. س7

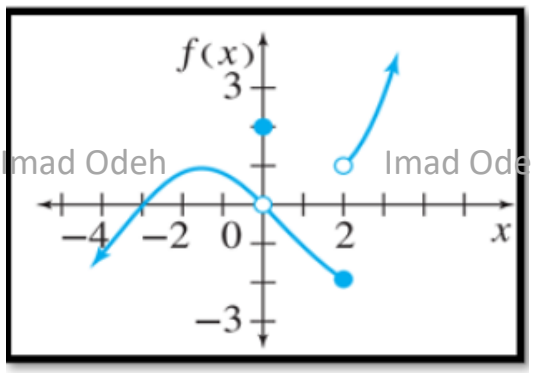
$$\lim_{x\to 2^-} f(x) =$$

A) -2

B) 2

C) 0

D) 1



Q8 Use the graph to determine. س8

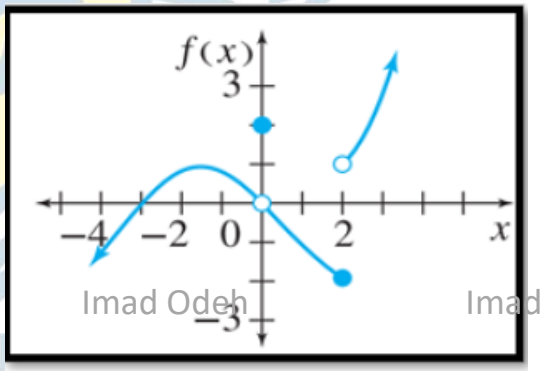
$$\lim_{x\to 0} f(x) =$$

A) -2

B) 2

C) 0

D) *does not exist*



Q9 Use the graph to determine. س9

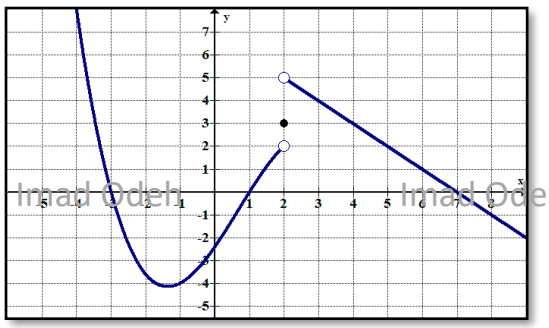
$$\lim_{x\to 2^+} f(x) =$$

A) 2

B) 3

C) 5

D) *does not exist*



Imad Odeh

Q9	Use the graph to determine.	س9

$$\lim_{x\to 1} f(x) =$$

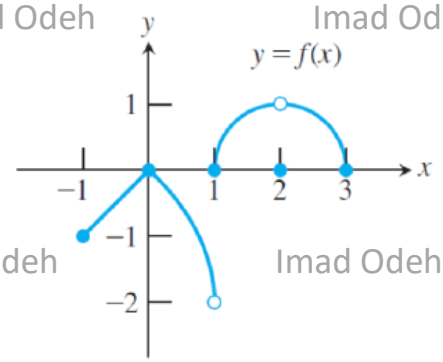
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

A) 1

B) -2

C) 0

D) *does not exist*



Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

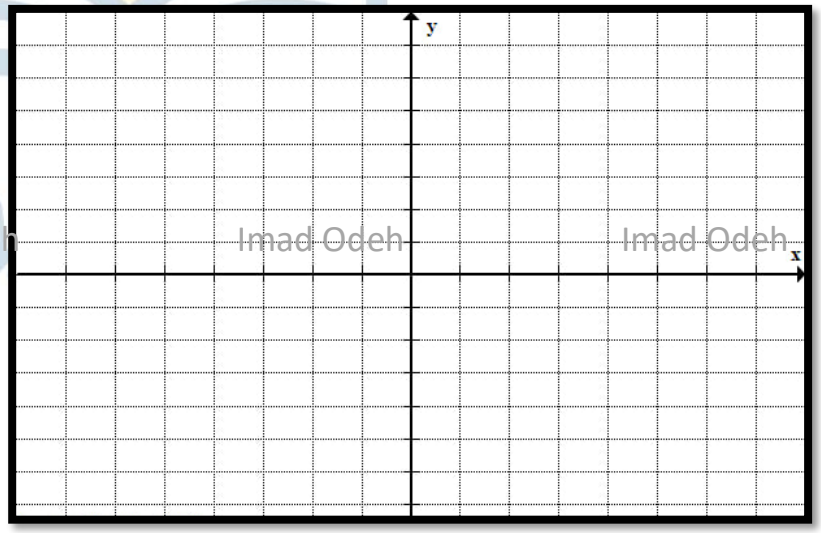
رسم بيان دالة بمعلومية بعض الخصائص
Sketch a graph of a function with a given properties

Q1	Sketch a graph of a function with the given properties.	س1 ارسم بيان الدالة والتي تحقق الخصائص التالية

قد تختلف الرسومات البيانية من شخص لأخر من الممكن رسم منحنيات او خطوط مستقيمة فقط نحتاج التركيز على صحة المعطيات

$f(-1) = 2\,, f(0) = -1\,, f(1) = 3$ and $\lim_{x\to 1} f(x)$ ***does not exist***

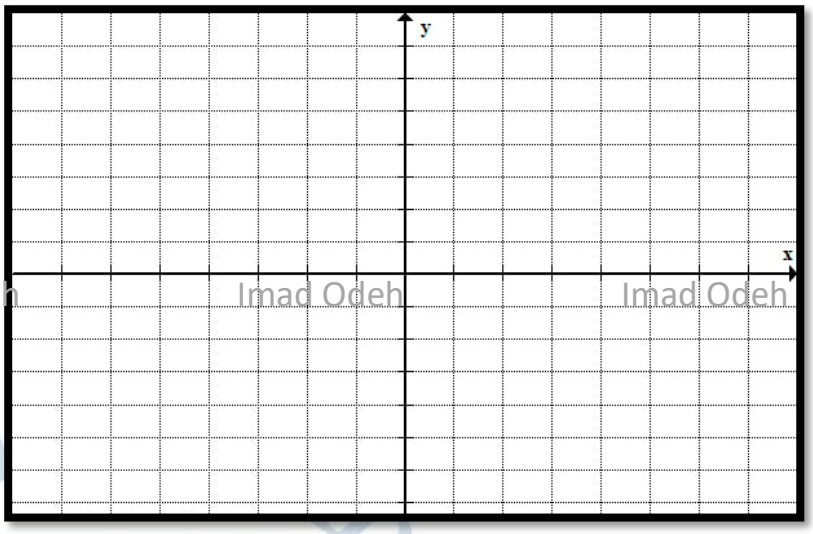
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh



Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q2	Sketch a graph of a function with the given properties.	س2 ارسم بيان الدالة والتي تحقق الخصائص التالية

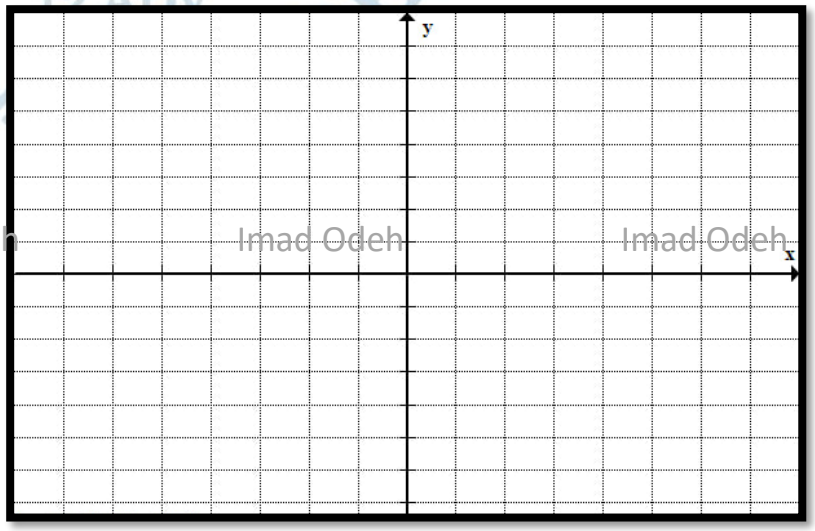
$$f(x) = 1 \; for \; -2 \leq x \leq 1 \, , \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = 3 \quad and \quad \lim_{x \to -2} f(x) = 1$$



Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q3	Sketch a graph of a function with the given properties.	س3 ارسم بيان الدالة والتي تحقق الخصائص التالية

$$f(0) = 1 \, , \quad \lim_{x \to 0-} f(x) = 2 \quad and \quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = 3$$

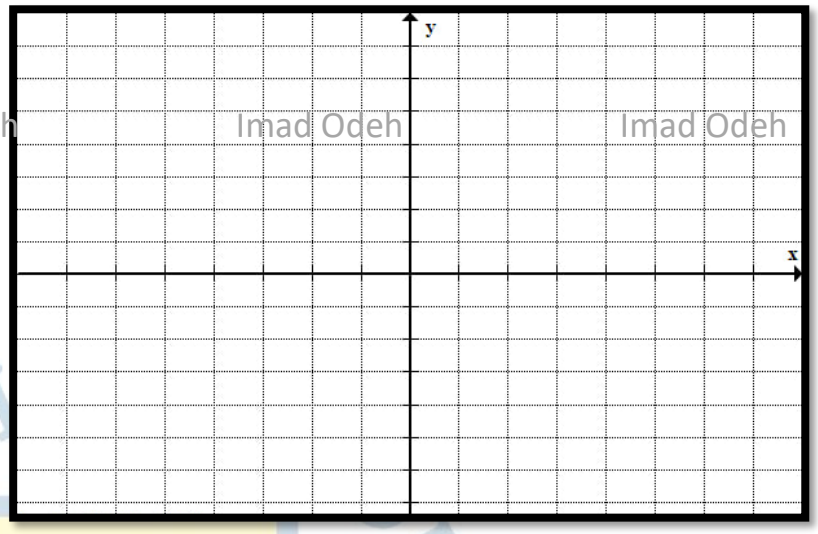


Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Imad Odeh
Imad Odeh

Q4	Sketch a graph of a function with the given properties.	س4 ارسم بيان الدالة والتي تحقق الخصائص التالية

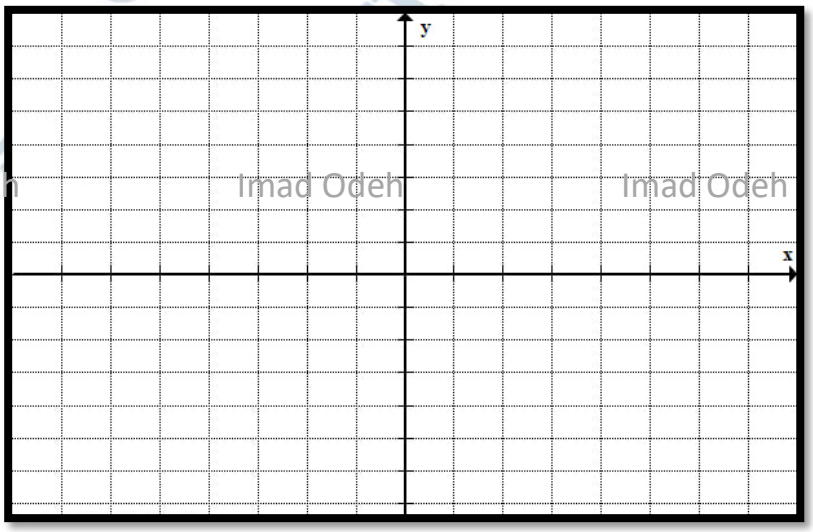
$\lim_{x\to 0} f(x) = -2$, $f(0) = 1$, $f(2) = 3$ *and* $\lim_{x\to 2} f(x) = \textit{does not exist}$



Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q5	Sketch a graph of a function with the given properties.	س5 ارسم بيان الدالة والتي تحقق الخصائص التالية

$f(-1) = 0$, $f(0) = 0$, $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1$ *and* $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$

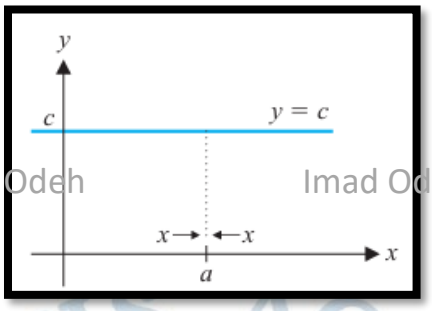


Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

2.3
حساب النهايات
COMPUTATION OF LIMITS

For any constant c and any real number a, $\lim_{x\to a} f(x) = c$

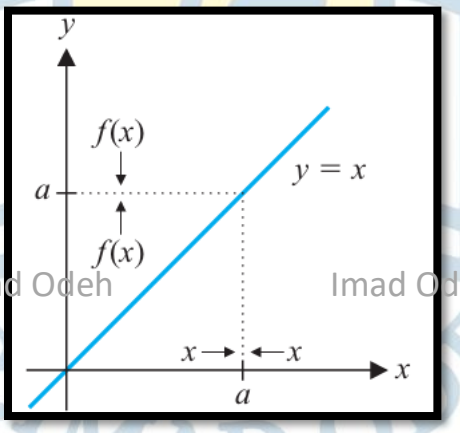
الدالة الثابتة نهايتها دائما نفس قيمة الدالة



Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

For any real number a,

$$\lim_{x\to a} x = a.$$



Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

THEOREM 3.1

Suppose that $\lim_{x\to a} f(x)$ and $\lim_{x\to a} g(x)$ both exist and let c be any constant. The following then apply:

(i) $\lim_{x\to a}[c \cdot f(x)] = c \cdot \lim_{x\to a} f(x)$,

(ii) $\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$,

(iii) $\lim_{x\to a}[f(x) \cdot g(x)] = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]\left[\lim_{x\to a} g(x)\right]$ and

(iv) $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$ $\left(\text{if } \lim_{x\to a} g(x) \neq 0\right)$.

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

لإيجاد النهاية عند نقطة

دائما نبدأ بالتعويض المباشر ونتبع الخطوات والمخطط الذي يليها

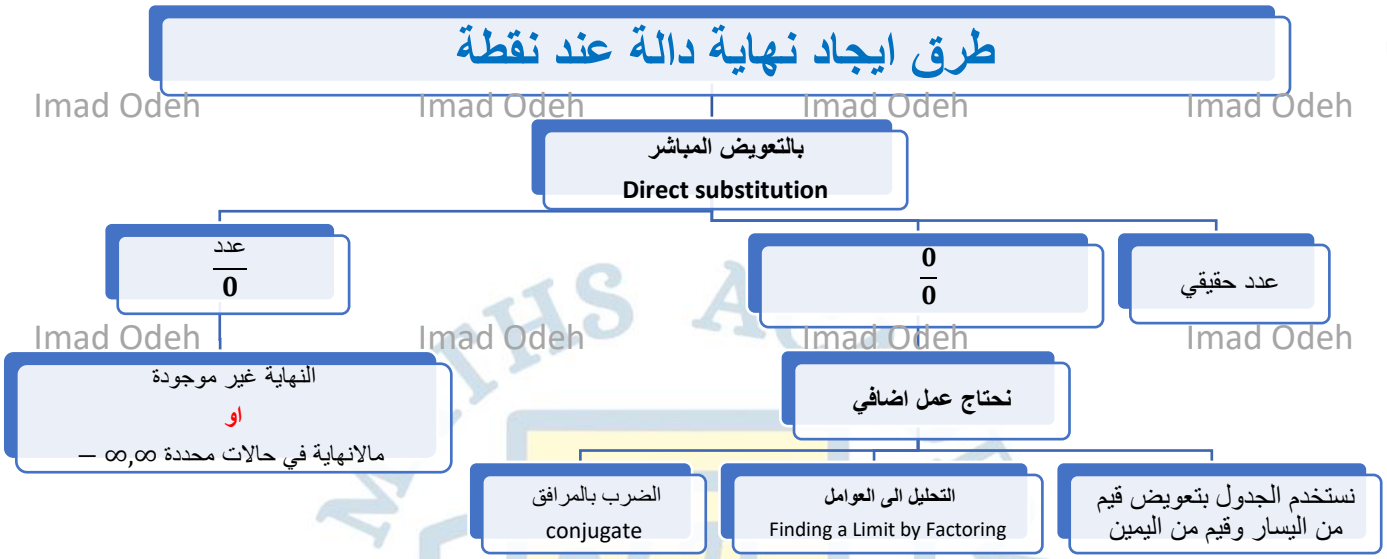
أولا: - إذا كان السؤال اختيار من متعدد نستخدم **الالة الحاسبة** ونعوض القيمة المطلوبة

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

ثانيا: - إذا كان السؤال كتابي نقوم بدراسة نوع الدالة وتحديد الطريقة الأمثل لإيجادها

في البداية نستخدم التعويض المباشر في جميع الحالات ومن ثم دراسة النتائج ومتابعة الحل باستخدام الطريقة المناسبة

Imad Odeh



Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

التعويض المباشر

لإيجاد النهاية نلجأ أولا الى التعويض المباشر

Q Evaluate	س اوجد قيمة

1) $\lim_{x\to 2}(3x^2-5x+4)$

عوض بالآلة

2) $\lim_{x\to 0}(x^2-3x+1)$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

3) $\lim_{x\to 3}\frac{x^3-5x+4}{x^2-2}$

4) $\lim_{x\to 2}\frac{x-5}{x^2+4}$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

في حال ناتج التعويض $\frac{0}{0}$ نستطيع استخدام التعويض باستخدام الجدول كما في المثال التالي

Solved example	مثال محلول
Q4 Evaluate	س4 اوجد قيمة

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$$

الحل بالتعويض المباشر نحصل على

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{2^2-4}{2-2}=\frac{0}{0}$$

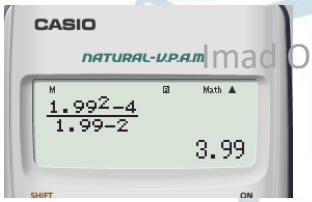
نستخدم التعويض بالجدول من خلال اختيار قيم على يسار ويمين العدد 2

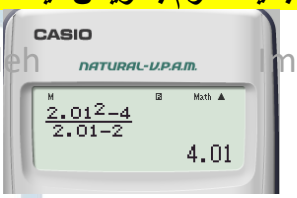
x	1.9	1.99	1.999	2	2.001	2.01	2.1
$f(x)$	3.9	3.99	3.999		4.001	4.01	4.1

من الجدول نلاحظ انه كلما اقتربنا من العدد $x=2$ من اليمين ومن اليسار فان قيمة الدالة تقترب من العدد $f(x)=4$ اي ان

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=4$$

او استخدام الالة بحيث نقوم بتعويض قيمة قبل النقطة وقيمة بعدها كما يلي





$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=4$$

Solved example	مثال محلول
Q5 Evaluate	س5 اوجد قيمة

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{1-x}$$

الحل بالتعويض المباشر نحصل على

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{1-x}=\frac{1^2-1}{1-1}=\frac{0}{0}$$

نستخدم التعويض بالجدول من خلال اختيار قيم على يسار ويمين العدد 1

x	0.9	0.99	0.999	1	1.001	1.01	1.1
$f(x)$							

من الجدول نلاحظ انه كلما اقتربنا من العدد $x=1$ من اليمين ومن اليسار فان قيمة الدالة تقترب من العدد $f(x)=\cdots$ اي ان

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{1-x}=\cdots$$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

حالة عدم وجود نهاية $\frac{\text{عدد}}{0}$

Solved example	مثال محلول
Evaluate	اوجد قيمة

Q6) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5}{x-2}$

Q7) $\lim_{x\to 3}\frac{3x+9}{x^2-9}$

الحل

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5}{x-2}=\frac{2^2-5}{2-2}=-\frac{1}{0}$$

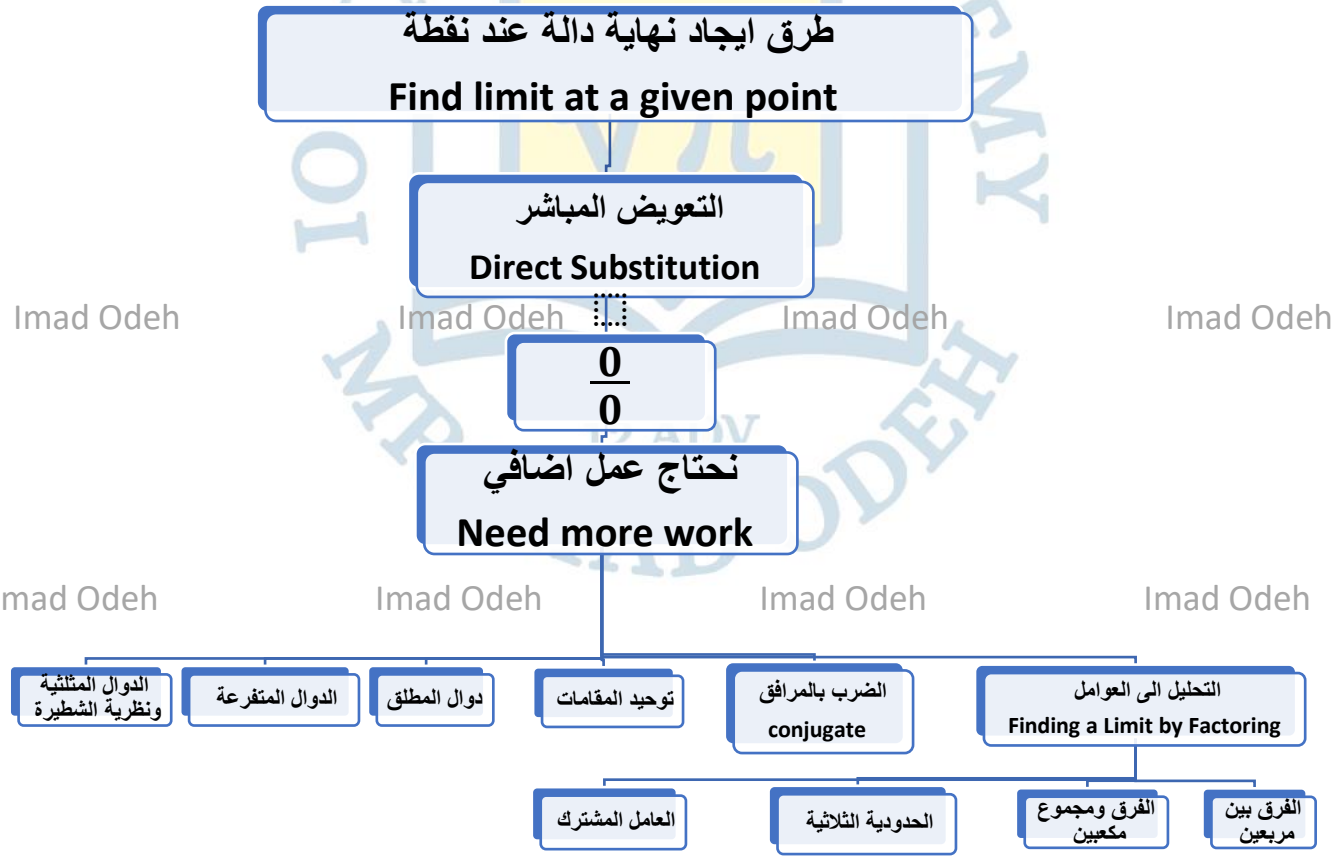
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-5}{x-2}$$

غير موجودة *does not exist*

الحالة الثانية عند الحصول على $\frac{0}{0}$ نلجأ الى المخطط التالي

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh



Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

التحليل الى العوامل
Finding a Limit by Factoring

عند التعويض المباشر قد نحصل على الصيغة $\frac{0}{0}$ وهذه الحالة تتطلب منا إجراءات إضافية للتخلص من الصفر في المقام

Remember

	التحليل	مثال Example
الفرق بين مربعين difference between two squares	$(x^2-y^2)=(x+y)(x-y)$	$(x^2-9)=(x+3)(x-3)$ $(x^2-25)=(x+5)(x-5)$
الفرق بين مكعبين difference between two cubes	$(x^3-y^3)=(x-y)(x^2+xy+y^2)$	$(x^3-8)=(x-2)(x^2+2x+4)$ $(x^3-1)=(x-1)(x^2+x+1)$
مجموع مكعبين sum of two cubes	$(x^3+y^3)=(x+y)(x^2-xy+y^2)$	$(x^3+27)=(x+3)(x^2-3x+9)$ $(x^3+64)=(x+4)(x^2-4x+16)$
القانون العام لحل المعادلة التربيعية Quadratic formula	$ax^2+bx+c=0$ $x=-\frac{b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	$x^2-3x-10=0$ $a=1, b=-3, c=-10$ $x=-2\ ,\ \ x=5$

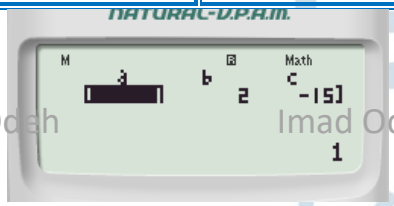
بالإمكان استخدام التحليل او استخدام الالة Mode 5 , 3

$x^2+2x-15=0$

$a=1,\quad b=2,\quad c=-15$

وندخل بالآلة قيم a و b و c ومن ثم المساواة لايجاد قيم x

$x=-5\ ,\ \ x=3$



مهم جدا

وفي حال كان معامل x^2 لا يساوي $a\neq 1$ نحصل على جذر نسبي وعند كتابة التحليل يجب وضع مقام الجذر النسبي معاملا ل x

مثال

$$3x^2-5x-2=0$$

استخدام التحليل او استخدام الالة Mode 5 , 3

$$a=3, b=-5, c=-2$$

$$x=2\ ,\ \ x=-\frac{1}{3}$$

$$3x^2-5x-2=(3x+1)(x-2)$$

Solved example	مثال محلول

Evaluate

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}$$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(x+2)=2+2=4$$

Evaluate	اوجد

Q1) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$

Imad Odeh Imad Odeh

Q2) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{1-x}$

Imad Odeh Imad Odeh

Q3) $\lim_{x\to 5}\frac{x-5}{x^2-25}$

Imad Odeh Imad Odeh

Q4) $\lim_{x\to -3}\frac{x^2-9}{x+3}$

Imad Odeh Imad Odeh

Q5) $\lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{3x-12}$

Imad Odeh Imad Odeh

Q6) $\lim_{x\to 2}\frac{5x^2-20}{x-2}$

Imad Odeh Imad Odeh

Q7) $\lim_{x\to 5}\frac{x^2-25}{x^2-5x}$

Imad Odeh Imad Odeh

Q8) $\lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{2}x-1}{x^2-4}$

Imad Odeh Imad Odeh

Q9) $\lim_{x\to -3}\frac{3x+9}{x^2-9}$

Imad Odeh Imad Odeh

$\lim_{x\to 2}\frac{x-2}{x^2-4}$

Imad Odeh Imad Odeh

Solved example	مثال محلول
Evaluate	اوجد

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x-3}$$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-x-6}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+2)}{x-3}=\lim_{x\to 3}(x+2)=3+2=5$$

Evaluate	اوجد

Q1) $$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2-3x+2}$$

Imad Odeh Imad Odeh

Q2) $$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x^2-4}$$

Imad Odeh Imad Odeh

Q3) $$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2+x-2}$$

Imad Odeh Imad Odeh

Q4) $$\lim_{x\to -1}\frac{x^2+x}{x^2-x-2}$$

Imad Odeh Imad Odeh

Q5) $$\lim_{x\to 3}\frac{3x-9}{x^2-5x+6}$$

Imad Odeh Imad Odeh

Q6) $$\lim_{x\to -1}\frac{(x-1)^2}{x^2+2x-3}$$

Imad Odeh Imad Odeh

Q7) $$\lim_{x\to -2}\frac{2+x}{x^2+2x}$$

Imad Odeh Imad Odeh

Q8) $$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-2x+1}$$

Imad Odeh Imad Odeh

Imad Odeh
Imad Odeh

Solved example	مثال محلول
Evaluate	اوجد

$$\lim_{x\to 1}\frac{3x^2+2x-5}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(3x+5)(x-1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(3x+5)=3(1)+5=8$$

Evaluate	اوجد

Q1) $\lim_{x\to 2}\frac{2x^2-5x+2}{x-2}$

Q2) $\lim_{x\to 3}\frac{2x^2-5x-3}{x^2-9}$

Q3) $\lim_{x\to 1}\frac{5x^2-3x-2}{x^2+2x-3}$

Q4) $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2-3x+2}=$

Q5) $\lim_{x\to 2}\frac{(x-3)^2-1}{2x^2-3x-2}=$

Q6) $\lim_{x\to 3}\frac{(x-1)^2-4}{x^2-2x-3}=$

Imad Odeh
MATHS ACADEMY
MR.IMAD ODEH
12 ADV

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Solved example	مثال محلول
Evaluate	اوجد

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^3-64}{x-4}$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{x^3-64}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x^2+4x+16)}{x-4}$$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

$$=\lim_{x\to 4}(x^2+4x+16)=(4)^2+4(4)+16=48$$

Evaluate	اوجد

Q1) $\lim_{x\to 4}\frac{x^3-64}{x^2-16}=$

Q2) $\lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{x^2-9}=$

Q3) $\lim_{x\to 3}\frac{x^3-27}{2x^2-7x+3}$

Q4) $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^2+2x-3}=$

Q5) $\lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{2x^2-3x-2}$

Q6) $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-x^2+3x-3}{x-1}=$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

مسائل منوعة

Evaluate — اوجد قيمة

Q1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x\, e^{-2x+1}}{x^2+x}$

Q2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-e^{2x}}{1-e^{x}}$

Q3) $\lim\limits_{x\to ln\,3} \dfrac{e^{2x}-e^{x}-6}{e^{x}-3} =$

Q4) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{(x^2-4)^{10}}{(x^2-4x+4)^{5}} =$

Q5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^{-2}-1}{2x^{-2}+1}$

Q6 Let — لتكن

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x^3-1)^{2n}}{(x^2-2x+1)^{n}} = 81$$

Find value of n — اوجد قيمة n

Imad Odeh
MATHS ACADEMY
MR.IMAD ODEH
12 ADV

Q7 if إذا كانت

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+kx+1}{x-2}\ Exist$$ موجودة

Find value of k اوجد قيمة k

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q8 if إذا كان

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2+ax-3}{x-3}=5$$

Find value of a اوجد قيمة a

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q9 if إذا كان

$$\lim_{x\to 2}\frac{ax^2-3x-7}{x-2}\ exist$$

what is the value of a? اوجد قيمة a

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q10 if إذا كانت

$$\lim_{x\to 2}\frac{ax^2+bx+6}{x-2}=5$$

Find value of a and b اوجد قيمة a و b

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

مسائل التعويض باستخدام خواص النهايات

Q1 If — س1 لتكن

$$\lim_{x\to a} f(x) = 2 \text{ and } \lim_{x\to a} g(x) = -3, \lim_{x\to a} h(x) = 0$$

Determine the limit, if possible.

1) $\lim_{x\to a}[2f(x) - 3g(x)]$

2) $\lim_{x\to a}[3f(x)g(x)]$

3) $\lim_{x\to a}\frac{[f(x)]^2}{g(x)}$

4) $\lim_{x\to a}\frac{2f(x)h(x)}{f(x)+h(x)}$

Q2 If — س2 لتكن

$$\lim_{x\to 3} f(x) = 4 \text{ and } \lim_{x\to 3} g(x) = -5$$

Determine the limit, if possible. — اوجد كل من النهايات التالية ان أمكن

1) $\lim_{x\to 3}[2f(x) - g(x)]$

2) $\lim_{x\to 3}[3f(x) - 4]$

3) $\lim_{x\to 3}[2f(x)g(x) - 3x^2 + 7]$

4) $\lim_{x\to 3}\frac{[f(x)]^2}{g(x)}$

5) $\lim_{x\to 3}\frac{2f(x)g(x)}{f(x)+g(x)}$

6) $\lim_{x\to 3}\left[\sqrt{f(x)} - g^2(x) + 8\right]$

Q3 If

س3 لتكن

$\lim_{x\to 0} f(x) = 2$ and $\lim_{x\to 0} g(x) = -3$

Find

اوجد

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x) - g(x)}{\sqrt{g(x) + 7}}$$

Q4 If

س4 لتكن

$$\lim_{x\to\sqrt{3}} \frac{1}{x^2 + g(x)} = \frac{1}{5}$$

Find

اوجد

$$\lim_{x\to\sqrt{3}} g(x)$$

Q5 if

س5 لتكن

$$p(x) = x^2 - 1$$

Find

اوجد

1) $\lim_{x\to 0} p(p(p(p((x)))))$

2) $\lim_{x\to 0} p(3 + 2p(x - p(x)))$

Imad Odeh
IO MATHS ACADEMY
12 ADV
MR.IMAD ODEH

Q6 If

س6 ليكن

$\lim_{x\to 3} f(x) = 4$ $\lim_{x\to 3}\left(\frac{x^2-9}{x-3} f(x) + 2g(x)\right) = 30$

Find

اوجد

$$\lim_{x\to 3} g(x)$$

نهايات دوال تحتوي جذور

Evaluating the Limit of an nth Root of a Polynomial

THEOREM 3.3

Suppose that $\lim_{x\to a} f(x) = L$ and n is any positive integer. Then,

$$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)} = \sqrt[n]{L},$$

where for n even, we must assume that $L > 0$.

Evaluate اوجد قيمة

Q1) $\lim_{x\to 2} \sqrt[5]{3x^2 - 2x}$

Q2) $\lim_{x\to 2} \sqrt[3]{2x + 1}$

Q3) $\lim_{x\to 2^-} \sqrt{4 - x^2}$

الضرب بمرافق الجذر
Finding a Limit by Rationalizing
Use conjugate

تذكر للتخلص من الجذر في المقام نضرب البسط والمقام بمرافق الجذر

Remember
That to rationalize the denominator or numerator we need to multiply it by its conjugate

تذكر
للتخلص من الجذر في المقام او الجذر نقوم بضرب كل من البسط والمقام بمرافق الجذر

the conjugate of $(\sqrt{x}-a)$ ***is*** $(\sqrt{x}+a)$ المرافق

Solved example	مثال محلول
Q1 **Evaluate**	س1 **اوجد قيمة**

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}$$

الحل:- نضرب البسط بمرافق الجذر $(\sqrt{x}+2)$

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}.\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x}+2}$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{x-4}{x-4}.\frac{1}{\sqrt{x}+2}$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{x}+2}=\frac{1}{\sqrt{4}+2}=\frac{1}{2+2}=\frac{1}{4}$$

Evaluate **اوجد قيمة**

Q1) $$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$$

Q1) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x}$$

Q3) $$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$$

Q4) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{4+x}-2}{x}$$

Imad Odeh
IMATHS ACADEMY 12 ADV MR.IMAD ODEH

Evaluate	اوجد قيمة

Q5) $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x}-1}$

Q6) $\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt{10-x}-3}$

Q7) $\lim_{x\to 0} \frac{2x}{3-\sqrt{x+9}}$

Q8) $\lim_{x\to 5} \frac{\sqrt{3x+1}-4}{10-2x}$

Q9) $\lim_{x\to 3} \frac{4-\sqrt{7x-5}}{x^2-9}$

Q10) $\lim_{x\to 4} \frac{4-x}{5-\sqrt{x^2+9}}$

Imad Odeh
IO MATHS ACADEMY
MR.IMAD ODEH
12 ADV

Evaluate | اوجد قيمة

Q11) $\lim_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x^2-2x-3}$

Q12) $\lim_{x\to 5} \dfrac{x^2-25}{\sqrt{x+4}-3} =$

Q13) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2+x-6}{3-\sqrt{13-2x}}$

Q14) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^2+x-2}{2-\sqrt{6-2x}}$

Q15) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{3+x}-2}{x^3-1}$

Q16) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2+x}{3-\sqrt{x^4+2x^2}}$

Imad Odeh
IO MATHS ACADEMY
MR.IMAD ODEH
12 ADV

مسائل تحتوي الجذر التكعيبي والجذر التربيعي

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

في المسائل التي تحتوي الجذر التكعيبي بالإمكان الضرب بمرافق الجذر التكعيبي

مثال مرافق المقدار $\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y}\right)$ هو $\left(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{x}\sqrt[3]{y}+\sqrt[3]{y^2}\right)$

او استخدام التعويض لتبسيط المسالة كما يلي افرض ان $u=\sqrt[3]{x}$ ومنها $u^3=x$

Evaluate	اوجد قيمة

Q1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$

افرض ان $u=\sqrt[3]{x}$ ومنها $u^3=x$

Imad Odeh Imad Odeh

Q2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+2x}-1}{x}$

افرض ان $u=\sqrt[3]{1+2x}$ ومنها $\frac{(u^3-1)}{2}=x$

Imad Odeh Imad Odeh

Q3) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x+\sqrt{x}-6}{x^2-16}$

افرض ان $\sqrt{x}=u$

Imad Odeh Imad Odeh

Q4) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x\sqrt{x}-8}{x-4}$

Imad Odeh Imad Odeh

Q5) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x+\sqrt{x}-2}{x-1}$

Imad Odeh Imad Odeh

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q6) **Evaluate** **اوجد قيمة**

$$\lim_{x\to 9} \frac{1}{\sqrt{x}-3} - \frac{6}{x-9}$$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q7 **if** **إذا كانت**

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+a}-3}{x} = 1$$

what is the value of a? **اوجد قيمة a**

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q8 **if** **إذا كانت**

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{ax+b}-1}{x} = 3$$

what is the value of a and b? **اوجد قيمة a و b**

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Imad Odeh

Imad Odeh

تبسيط الكسور
Simplify Fractions

Remember
To add and subtract fractions we use

تذكر
عند جمع وطرح الكسور نستخدم القاعدة التالية

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm cb}{bd}$$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Solved example	مثال محلول
Evaluate	اوجد قيمة

$$\lim_{x\to 2} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{2}}{x-2}$$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

$$\lim_{x\to 2} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{2}}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{\frac{2-x}{2x}}{x-2}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{2-x}{2x(x-2)} = \lim_{x\to 2} \frac{-(x-2)}{2x(x-2)}$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{-1}{2x} = -\frac{1}{2(2)} = -\frac{1}{4}$$

Evaluate	اوجد قيمة

Q1) $$\lim_{x\to 3} \frac{\frac{1}{x} - \frac{1}{3}}{x-3}$$

Imad Odeh Imad Odeh

Q2) $$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x+2} - \frac{1}{2}}{x}$$

Imad Odeh Imad Odeh

Q3) $$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{x+2}}{x}$$

Imad Odeh Imad Odeh

Q4) $$\lim_{x\to 5} \frac{\frac{1}{2x} - \frac{1}{10}}{x^2 - 25}$$

Imad Odeh Imad Odeh

Evaluate | اوجد قيمة

Q5) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\frac{1}{3-x}-1}{x-2}$

Q6) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\frac{2}{3x-5}-2}{x-2}$

Q7) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\frac{5}{2x-3}+5}{x-1}$

Q8) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)$

Q9) $\lim\limits_{x\to 2} \left(\dfrac{1}{x-2}-\dfrac{4}{x^2-4}\right)$

Q10) $\lim\limits_{x\to 5} \left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{5}\right)\times\left(\dfrac{x}{x^2-25}\right)$

Q11) $\lim\limits_{x\to 3} \left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{3}\right)\times\left(\dfrac{x}{x^2-9}\right)$

Imad Odeh

Q12 if إذا كان

$$\lim_{x\to 2}\left(\frac{1}{x-2}+\frac{a}{x^2-4}\right)=\frac{1}{4}$$

what is the value of a? اوجد قيمة a

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q13 if إذا كان

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{a}{x+a}-b}{x}\right)=-1$$

what is the value of a and b ? اوجد قيمة a و b

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

القيمة المطلقة
Absolute value

Remember

We need to rewrite function without absolute value notation

Every time we must put the sign of the x coefficient on the right side on the number line

تذكر

عند التعامل مع القيمة المطلقة يجب إعادة تعريف الدالة للتخلص من القيمة المطلقة كما يلي

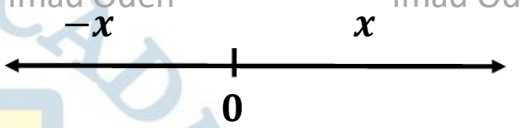
دائما على يمين العدد نضع نفس اشارة معامل x

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

$$f(x) = |x|$$

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x, & x \le 0 \\ x, & x > 0 \end{cases}$$

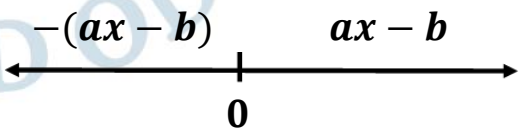
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh



$$f(x) = |ax - b|$$

$$f(x) = |ax - b| = \begin{cases} -(ax - b), & x \le \frac{b}{a} \\ ax - b, & x > \frac{b}{a} \end{cases}$$

Imad Odeh Imad Odeh 12 ADV Imad Odeh Imad Odeh

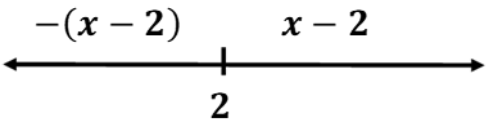


Example 1

$$f(x) = |x - 2|$$

$$f(x) = |x - 2| = \begin{cases} -(x - 2), & x \le 2 \\ x - 2, & x > 2 \end{cases}$$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh



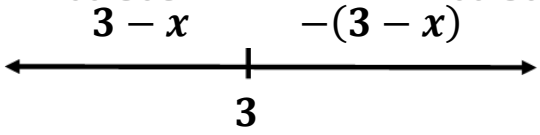
في المثال التالي اشارة معامل x سالبة لذا نضع الاشارة السالبة على اليمين

Example 2

$$f(x) = |3 - x|$$

$$f(x) = |3 - x| = \begin{cases} (3 - x), & x \le 3 \\ -(3 - x) & , \quad x > 3 \end{cases}$$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

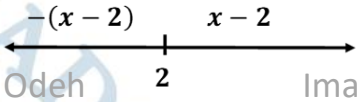


Imad Odeh

Solved example	مثال محلول
Evaluate	اوجد قيمة

$$\lim_{x \to 2} \frac{x - 2}{|x - 2|}$$

$$f(x) = |x - 2| = \begin{cases} -(x - 2), & x \le 2 \\ x - 2 & , \quad x > 2 \end{cases}$$



Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x - 2}{-(x - 2)} = -1 \qquad \lim_{x \to 2^+} \frac{x - 2}{(x - 2)} = 1$$

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x - 2}{-(x - 2)} \neq \lim_{x \to 2^+} \frac{x - 2}{(x - 2)}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x - 2}{|x - 2|} \textbf{ does not exist}$$ غير موجودة

Evaluate	اوجد قيمة

Q1) $$\lim_{x \to -1^+} \frac{|x + 1|}{x^2 - 1}$$

Imad Odeh Imad Odeh

Q2) $$\lim_{x \to 0} \left(\frac{2}{x} - \frac{2}{|x|}\right) =$$

Imad Odeh Imad Odeh

Q3) $$\lim_{x \to 0} \frac{2x - |x|}{|3x| - 2x}$$

Imad Odeh Imad Odeh

Q4) $$\lim_{x \to 1} \frac{|x - 1|}{1 - x}$$

Imad Odeh Imad Odeh

Imad Odeh

Evaluate	اوجد قيمة

Q5) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x-2}{|x-2|}$

Q6) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{|x-2|-3}{x-5}$

Q7) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{|x-2|-3}{x^2-25}$

Q8) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{|2x-1|-5}{x-3}$

Q9) $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{x|x-1|-20}{x^2-25}$

Q10) $\lim\limits_{x\to -1} \dfrac{x+|x|-2}{x^2-1}$

Q11) $\lim\limits_{x\to 9} \dfrac{5-|x-4|}{|10-x|-1}$

Q12) $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x|1-x|-6}{x^2-3x}$

Imad Odeh

Q13 Let إذا كان

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-k^2}{x-k}=\lim_{x\to 1}(|x|+5)$$

Find k اوجد قيمة k

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Remember تذكر

$$\sqrt{x^2}=|x|$$

Q14 Evaluate اوجد قيمة

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+x}{\sqrt{x^4+2x^2}}$$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Imad Odeh

الدوال المتشعبة
Piecewise functions

في الدوال المتشعبة والتي يكون لها أكثر من قاعدة كما في المثال المجاور إذا كان العدد المطلوب ايجاد قيمة الدالة له نحدد مكانه اولا فاذا كان اقل او يساوي العدد a نعوض في $g(x)$ وإذا كان أكبر من العدد a نعوض في $h(x)$

$$f(x)=\begin{cases} g(x), & x \le a \\ h(x), & x > a \end{cases}$$

Q1 Let **س1 ليكن**

$$f(x)=\begin{cases} x^2+3, & x<0 \\ 2x-4, & x \ge 0 \end{cases}$$

Find اوجد قيمة

1) $f(-3)$=.....

2) $f(2)$=.....

3) $f(0)$ = ...

Solved example **مثال محلول**

Let **إذا كان**

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1\,, & x<-1 \\ -3x-1\,, & x \ge -1 \end{cases}$$

Find اوجد قيمة $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$

$$\lim_{x\to -1^-} x^2+1=(-1)^2+1=2 \qquad \lim_{x\to -1^+} -3x-1=-3(-1)-1=2$$

$$\lim_{x\to -1^-} f(x)=\lim_{x\to -1^+} f(x)=2$$

$$\lim_{x\to -1} f(x)=2$$

Q2 Let **س2 إذا كان**

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2\cos x+1, & x<0 \\ e^x-4\,, & x \ge 0 \end{cases}$$

Find اوجد قيمة $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

Q3 Let

س3 إذا كان

$$f(x)=\begin{cases} x^3-1 & , \quad x<0 \\ 0 & \quad x=0 \\ \sqrt{x+1}-2 & \quad x>0 \end{cases}$$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Find $\lim_{x\to 0} f(x)$ اوجد قيمة

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q4 Let

س4 إذا كان

$$f(x)=\begin{cases} 2x^2+x & , \quad x<-1 \\ \sqrt{3-x} & , \quad -1<x<1 \\ 2x+1 & , \quad x\geq 1 \end{cases}$$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Find $\lim_{x\to -1} f(x)$ اوجد قيمة

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q5 Let

س5 إذا كان

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{9-x^2}{x-3} & , \quad x\neq 3 \\ 2x & , \quad x=3 \end{cases}$$

Find $\lim_{x\to 3} f(x)$ اوجد قيمة

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q6 Let

س6 إذا كان

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{2x-1}-3}{x-5}, & x\neq 5\\ x+1, & x=5\end{cases}$$

Find $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$

اوجد قيمة

Q7 Let

س7 إذا كان

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x-2}{x^2-2x}, & x\neq 2\\ x+1, & x=2\end{cases} \quad , \quad g(x)=\begin{cases}3x+1, & x\neq 2\\ \sin x, & x=2\end{cases}$$

Find $\lim\limits_{x\to 2}(f(x)+g(x))$

اوجد قيمة

Q8 Let

س8 إذا كان

$$f(x)=\begin{cases}log\ x+4, & x\geq 1\\ 5x-1, & x<1\end{cases} \quad , \quad g(x)=\frac{x-1}{1-x}$$

Find $\lim\limits_{x\to 1}\big(f(x)+g(x)\big)$

اوجد قيمة

Imad Odeh

Q9 Let

س9 إذا كان

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-9}{x-3}, & x<3\\ 2x+b, & x\geq 3\end{cases}$$

Find the value of b such that

اوجد قيمة b حيث ان

$$\lim_{x\to 3} f(x) \text{ exists}$$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q10 Let

س10 إذا كان

$$f(x)=\begin{cases}x^2+a, & x\leq -1\\ 2x-b, & x>-1\end{cases} \quad \text{and} \quad \lim_{x\to -1} f(x)=2$$

Find a and b

اوجد قيمة a و b

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q11 Let

س11 إذا كان

$$f(x)=\begin{cases}\log_2 x, & 0<x\leq 8\\ 3^{kx}, & x>8\end{cases} \quad \text{and} \quad \lim_{x\to 8} f(x) \text{ موجودة } exist$$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Find a

اوجد قيمة a

Imad Odeh

مثلثية

المتطابقات المثلثية

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$	$\csc x = \frac{1}{\sin x}$, $\sec x = \frac{1}{\cos x}$, $cot\ x = \frac{1}{tan\ x}$	
$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$	$\tan^2 x + 1 = \sec^2 x$	$\cot^2 x + 1 = \csc^2 x$
$\sin x = \cos(\frac{\pi}{2} - x)$	$\tan x = \cot(\frac{\pi}{2} - x)$	$\sec x = \csc(\frac{\pi}{2} - x)$
$\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$	$\cot x = \tan(\frac{\pi}{2} - x)$	$\csc x = \sec(\frac{\pi}{2} - x)$
$\sin(\pi - x) = \sin x$	$\sin(\pi + x) = -\sin x$	
$\cos(\pi - x) = -\cos x$	$\cos(\pi + x) = \cos x$	
$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$		
$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$	$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$	$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$
$cos(-x) = cos\ x$ Even function دالة زوجية	$sin(-x) = -\sin x$ Odd function دالة فردية	$tan(-x) = -\tan x$ Odd function دالة فردية

عماد عودة عماد عودة عماد عودة

THEOREM 3.4

For any real number a, we have

(i) $\lim_{x \to a} \sin x = \sin a$,

(ii) $\lim_{x \to a} \cos x = \cos a$,

(iii) $\lim_{x \to a} e^x = e^a$ and

(iv) $\lim_{x \to a} \ln x = \ln a$, for $a > 0$.

(v) $\lim_{x \to a} \sin^{-1} x = \sin^{-1} a$, for $-1 < a < 1$,

(vi) $\lim_{x \to a} \cos^{-1} x = \cos^{-1} a$, for $-1 < a < 1$,

(vii) $\lim_{x \to a} \tan^{-1} x = \tan^{-1} a$, for $-\infty < a < \infty$ and

(viii) if p is a polynomial and $\lim_{x \to p(a)} f(x) = L$, then $\lim_{x \to a} f(p(x)) = L$.

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1\,,\qquad \lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=1,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{x}{\tan x}=1,\quad \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{\tan x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{bx}=\frac{a}{b},\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\tan ax}{bx}=\frac{a}{b}$$

Evaluate	اوجد قيمة

عوض بالآلة

ملاحظة ضع الالة على وضع Radian

Q1) $\lim_{x\to 0}\cos^{-1}(x^2)=$

Q2) $\lim_{x\to 0} sin^{-1}\left(\frac{x+1}{2}\right)$

Q3) $\lim_{x\to 0} sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{x+3}}{2}\right)$

Q4) $\lim_{x\to 1} tan^{-1}\left(\frac{x}{x^2-2x+1}\right)$

Evaluate	اوجد قيمة

Q4) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}$

Q5) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{3x}$

Q6) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{tan\ 2x}$

Q7) $\lim_{x\to 0}\frac{\tan\ 3x}{5x}$

Q8) $\lim_{x\to 0}(x\ cot\ x)$

Q9) $\lim_{x\to 0}(x^2\ csc^2\ x)$

Evaluate اوجد قيمة

Q10) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2+x}{\sin x}$

Q11) $\lim_{x\to 2} \frac{\sin(x^2-4)}{x^2-4}$

Q12) $\lim_{x\to 0} (\frac{xe^x}{\tan x})$

Q13) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin|x|}{x}$

Q12) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\sec^2 2x}{x^2}$

Q13) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x-1}{x^2}$

Q14) $\lim_{x\to 0} \frac{x\sin x}{1-\cos x}$

Q15) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos^2 x-1}{2x^2}$

Imad Odeh
IOMATHS ACADEMY 12 ADV MR IMAD ODEH

Evaluate | اوجد قيمة

Q16) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x^2}$

Q17) $\lim_{x\to 0} \frac{\cos x - 1}{x \sin x}$

Q18) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{3x^2}{1-\cos^2 x}\right) =$

Q19) $\lim_{x\to 0} \left(\frac{x^2}{\sec x - 1}\right) =$

Q20) $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{1-\sqrt{1+x}}$

Q21) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \tan(x) - \sec(x)$

Q22) $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{x - \frac{\pi}{2}}$

Q23) $\lim_{x\to \pi} \frac{\sin x}{x - \pi}$

Imad Odeh
IO MATHS ACADEMY
12 ADV
MR.IMAD ODEH

Evaluate اوجد قيمة

Q24) $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}} \frac{1-\tan x}{\sin x-\cos x} =$

Imad Odeh Imad Odeh

Q25) $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{\sec^2 x-1}}{x} =$

Imad Odeh Imad Odeh

Q26) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{3\sec x-3}$

Imad Odeh Imad Odeh

Q27) $\lim_{\theta\to 0} \frac{\theta+\theta\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}$

Imad Odeh Imad Odeh

Q28) $\lim_{x\to\frac{\pi}{3}} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)}{\frac{\pi}{3}-x}$

Imad Odeh Imad Odeh

Q29) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan^{-1} x}{x}$

Imad Odeh Imad Odeh

Q30) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan^{-1} x^2}{x^2}$

$\lim_{x\to 0} 6x^2(\cot x)(\csc x)$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
Imad Odeh
Imad Odeh

Q30 Given that إذا كان

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$$

evaluate اوجد قيمة

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{1-\cos x}}{x}$$

Q31 Find value of k if k اوجد قيمة 31س

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin kx}{3x} = 2$$

Q32 Find value of k if k اوجد قيمة 32س

$$\lim_{x\to -3} \frac{x^2-9}{x+3} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin 6kx}{5x} =$$

Imad Odeh

نظرية الشطيرة

THEOREM 3.5 (Squeeze Theorem)

Suppose that

$$f(x) \le g(x) \le h(x)$$

for all x in some interval (c, d), except possibly at the point $a \in (c, d)$ and that

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} h(x) = L,$$

for some number L. Then, it follows that

$$\lim_{x \to a} g(x) = L, \text{ also.}$$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Determine the value of — اوجد قيمة

Q1) $\lim_{x \to 0} \left[x^2 \cos\left(\frac{1}{x}\right)\right]$.

Q2) $\lim_{x \to 0^+} \left[\sqrt{x} \sin^2\left(\frac{1}{x}\right)\right]$.

Q3) $\lim_{x \to 0^+} \left[\sqrt{x} \cos^2\left(\frac{1}{x}\right)\right] = 0$.

Q4) $\lim_{x \to 0} (2x) \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q5 Suppose that افرض ان

$$|f(x)| \leq 4$$

Prove that $\lim_{x\to 0} x^2 f(x) = 0$ اثبت ان

تذكر

ان إذا كان $|x| \leq a$ فان $-a \leq x \leq a$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q6 Use squeeze theorem to prove that استخدم نظرية الشطيرة في اثبات

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x^3}{x^2+1} = 0$$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q7 if س8 إذا كان

$$\frac{2x^2 - x^3}{2} \leq x^2 f(x) \leq \frac{x^2 + sin^2 x}{2}$$

Find $\lim_{x\to 0} f(x)$ اوجد

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q8 if إذا كان

$$(x^2-1)(x^2+1) \le (x-1)f(x) \le (x^2+2x-3) \text{ Where } x \neq 1 \ , [-3,3]$$

Find اوجد

$$\lim_{x\to 1} f(x)$$

Q9 if إذا كان

$$\frac{1}{32}(x^2-16) \le (x-4)f(x) \le \sqrt{x}-2 \ , \quad x \neq 4$$

Find اوجد

$$\lim_{x\to 4} f(x)$$

Q10 if إذا كان

$$|g(x)+4| \le 2(3-x)^4 \quad \textit{is true for all value of } x$$

Find اوجد

$$\lim_{x\to 3} g(x)$$

تذكر

ان إذا كان $|x| \le a$ فان $-a \le x \le a$

Q11 if إذا كان

$$|g(x)+4| \le 2(2-x)$$

Find اوجد

$$\lim_{x\to 2} g(x)$$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q12 If إذا كان

$$(sin\, x + 2x) \le x\, f(x) \le x^2 + 3x$$

Find اوجد

$$\lim_{x\to 0} f(x)$$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Imad Odeh

Lesson 2-4
الاتصال ونتائجه
CONTINUITY AND ITS CONSEQUENCES

For a function f defined on an open interval containing $x = a$, we say that f is ***continuous*** at a when

الدالة f المعرفة على فترة مفتوحة تحتوي النقطة $x = a$ تكون متصلة إذا كان

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Otherwise, f is said to be **discontinuous** at $x = a$.

وإذا لم يتحقق هذا الشرط تكون الدالة غير متصلة عند $x = a$.

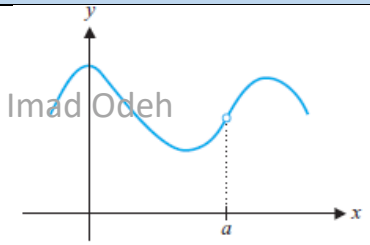
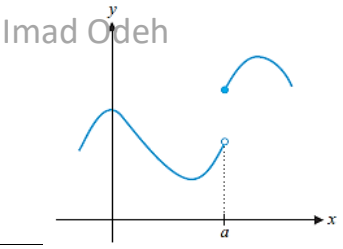
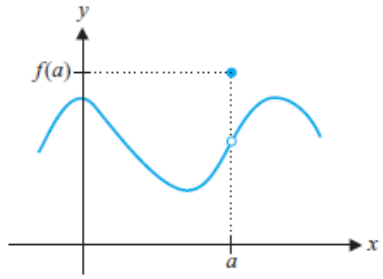
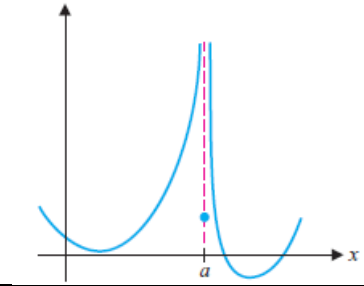
For f to be ***continuous*** at $x = a$, the definition says that

بصورة عامة لبحث اتصال دالة عند نقطة يجب دراسة الشروط الثلاثة التالية

i) $f(a)\ defined$ الدالة معرفة

ii) $\lim_{x \to a} f(x)\ exist$ النهاية موجودة

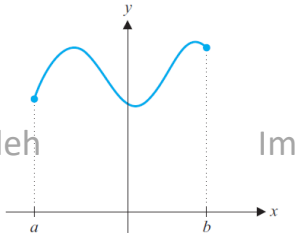
iii) $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ قيمة الدالة تساوي نهاية الدالة

Function الدالة	Continuity at $x = a$ الاتصال عند	Explain التفسير
	discontinuous غير متصلة hole فجوة *removable* قابل للإزالة	الدالة غير معرفة $f(a)\ not\ defined$
	discontinuous غير متصلة jump قفزة الدالة not removable غير قابل للإزالة	$f(a)\ defined$ الدالة معرفة النهاية غير موجودة $\lim_{x \to a} f(x)\ does\ not\ exist$
	discontinuous غير متصلة hole فجوة	$f(a)\ defined$ الدالة معرفة $\lim_{x \to a} f(x)\ exist$ النهاية موجودة قيمة الدالة لا تساوي نهاية الدالة $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$
	discontinuous غير متصلة blow up انفصال لانهائي	$f(a)\ defined$ الدالة معرفة النهاية غير موجودة $\lim_{x \to a} f(x)\ does\ notexist$

تحديد مجال الدوال المختلفة

Function الدالة		Domain المجال
الحدوديات Polynomial	$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots a_0$	All real numbers $(-\infty, \infty)$
النسبية Rational	$y = \frac{f(x)}{g(x)}$	$g(x) \neq 0$
الجذور Radical	$y = \sqrt{f(x)}$	$f(x) \geq 0$
	$y = \sqrt[n]{f(x)}$	$\begin{cases} n \ (\text{فردي}) \ odd \ , all \ real \ number \\ n \ (\text{زوجي}) \ even \ , \quad f(x) \geq 0 \end{cases}$
المثلثية Trigonometry	$y = \sin x$ $y = \cos x$ $y = \tan^{-1} x$	All real numbers $(-\infty, \infty)$
	$y = \tan x$	$x \neq \frac{n\pi}{2}, n = \pm 1,3,5 \ldots$
المعكوس Invers	$y = \sin^{-1} x$ $y = \cos^{-1} x$	$-1 \leq x \leq 1$
الاسية Exponential	$y = e^x$	All real numbers $(-\infty, \infty)$
اللوغاريتمية Logarithmic	$y = ln\|f(x)\|$	$f(x) > 0$

If f is continuous at every point on an open interval (a, b), we say that f is continuous on (a, b).	تكون الدالة f متصلة على الفترة (a, b) إذا كانت الدالة f متصلة على جميع النقاط في الفترة المفتوحة (a, b)
we say that f is continuous on the closed interval $[a, b]$, if f is continuous on the open interval (a, b) and	تكون الدالة f متصلة على الفترة $[a, b]$ إذا كانت الدالة f متصلة على جميع النقاط في الفترة المفتوحة (a, b) وكان
$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a), \lim_{x \to b^-} f(x) = f(b)$	



Determine the interval on which f is continuous	حدد الفترات التي تكون عندها الدالة f متصلة

Q1) $f(x) = \dfrac{x^2 + x - 2}{x + 2}$

Q2) $f(x) = \dfrac{x^2 - x - 6}{x - 3}$

Q3) $f(x) = \sqrt{x + 3}$

Q4) $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$

Q5) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$

Q6) $f(x) = (x - 1)^{\frac{3}{2}}$

Q7) $f(x) = \sqrt[3]{x + 2}$

Q8) $f(x) = \sin(1 + e^x)$

Q9) $f(x) = \sin^{-1}(x + 2)$

Q10) $f(x) = \cos(x^2 - 5x + 2)$

Imad Odeh

Determine the interval on which f is continuous

حدد الفترات التي تكون عندها الدالة f متصلة

Q11) $f(x) = \ln(3x-4)$

Q12) $f(x) = \ln(\sin x)$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Imad Odeh

Q13) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x+1}+e^x}{x^2-2}$

Q14) $f(x) = \dfrac{\ln(x^2-1)}{\sqrt{x^2-2x}}$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q15) $f(x) = \cos^{-1}(x-2)$

Q16) $f(x) = \dfrac{ln(1-x^2)}{\sqrt{x}}$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q17) $f(x) = \sqrt{9-x^2}$

Q18)

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Imad Odeh

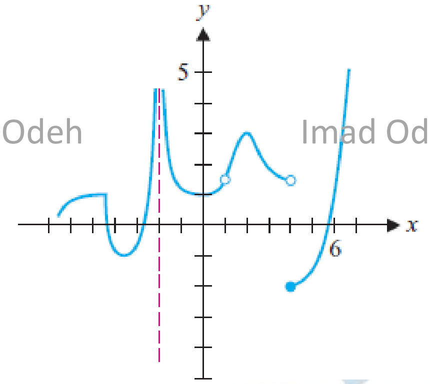
مسائل الاتصال بالرسم

يكون للدالة انفصال قابل للإزالة إذا كان الرسم يحتوي فجوة اي ان النهاية موجودة عند نقطة، ولكن لا تساوي قيمة الدالة عند تلك النقطة

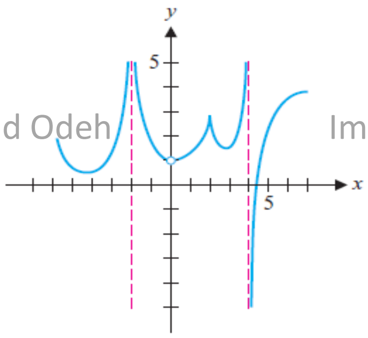
Use the given graph to identify all points on which the function f is discontinuous. Determine which one is removable

اعتمد على الرسم التالي لتحديد النقاط التي تكون عندها الدالة f غير متصلة وحدد أي منها قابل للإزالة

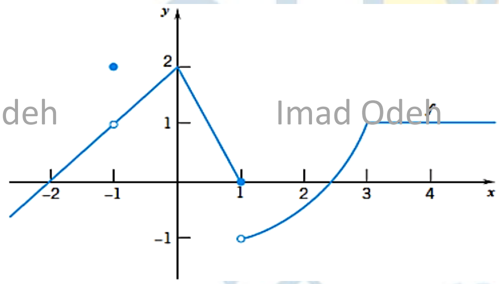
Q1)



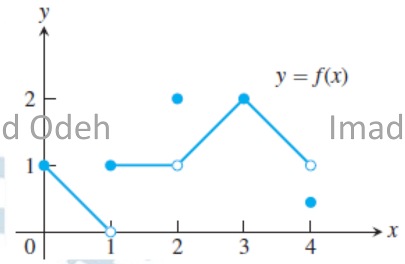
Q2)



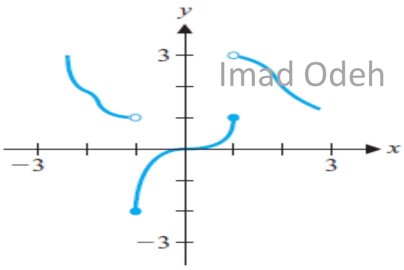
Q3)



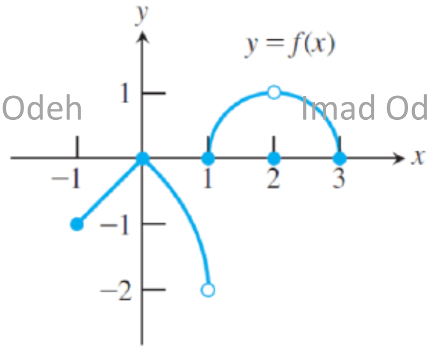
Q4)



Q5)



Q6)



مسائل بحث شروط الاتصال ونقاط الانفصال والدالة الموسعة

Explain why each function fails to be continuous at the given x-value by indicating which of the three conditions in Definition 4.1 are not met	وضح سبب عدم اتصال كل دالة مما يلي عند القيمة المحددة لكل منها اعتمد على شروط الاتصال في التعريف

For $\boldsymbol{f}$ to be ***continuous*** at $\boldsymbol{x = a}$, the definition says that

i) $f(a)\ defined$

ii) $\lim\limits_{x\to a} f(x)\ exist$

iii) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$

Q1) $f(x) = \dfrac{x}{x-1}\ at\ x = 1$

Q2) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}\ at\ x = 1$

Q3) $f(x) = \sin\dfrac{1}{x}\ at\ x = 0$

Q4) $f(x) = \dfrac{e^{x-1}}{e^x-1}\ at\ x = 0$

Q5) $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 2 \\ 3, & x = 2 \\ 3x-2, & x > 2 \end{cases}$ $at\ x = 2$

Imad Odeh
Imad Odeh
Imad Odeh
Imad Odeh
Imad Odeh
Imad Odeh
Imad Odeh
Imad Odeh
Imad Odeh
Imad Odeh
Imad Odeh
Imad Odeh
Imad Odeh
Imad Odeh
Imad Odeh
Imad Odeh
Imad Odeh
Imad Odeh
Imad Odeh
Imad Odeh

لتحديد القيم التي يكون عندها لدالة النسبية انفصال قابل للإزالة نوجد اصفار المقام والمعامل الذي نستطيع اختصاره مع معاملات البسط يكون عنده انفصال قابل للإزالة

Find all discontinuities and determine which are removable.

اوجد قيم x التي يكون عندها للدالة نقطة انفصال قابل للإزالة

Q1) $$f(x)=\frac{x-1}{x^2+2x-3}$$

Q2) $$f(x)=\frac{x+2}{x^2-4}$$

Q3) $$f(x)=x\cot x$$

Q4) $$f(x)=\begin{cases}\sin x & , \quad x<0\\ x^2 & , \quad 0\le x\le 2\\ 4x-3 & , \quad x>2\end{cases}$$

(a) Find all values of x at which f is not continuous.
(b) Determine which value in (a) is a removable discontinuity.
(c) Expand $f(x)$ to make it continuous anywhere.

أ) اوجد جميع قيم x التي تكون عندها الدالة f غير متصلة
ب) حدد اي من هذه القيم يكون عندها الانفصال قابل للإزالة
جـ) اوجد الدالة الموسعة والتي تجعل الدالة $f(x)$ متصلة لجميع القيم

Q1) $$f(x)=\frac{x^2-x-6}{x-3}$$

Q2) $$f(x)=\frac{x^2-4}{x^2+3x-10}$$

Imad Odeh
Imad Odeh
Imad Odeh
Imad Odeh
Imad Odeh
Imad Odeh
Imad Odeh
Imad Odeh
Imad Odeh
Imad Odeh
Imad Odeh
Imad Odeh
Imad Odeh
Imad Odeh
Imad Odeh
Imad Odeh
Imad Odeh
Imad Odeh
Imad Odeh
Imad Odeh

(a) Find all values of x at which f is not continuous.
(b) Determine which value in (a) is a removable discontinuity.
(c) Expand $f(x)$ to make it continuous anywhere.

أ) اوجد جميع قيم x التي تكون عندها الدالة f غير متصلة
ب) حدد اي من هذه القيم يكون عندها الانفصال قابل للإزالة
جـ) اوجد الدالة الموسعة والتي تجعل الدالة $f(x)$ متصلة لجميع القيم

Q3) $$f(x) = \frac{2x^2 - 2x - 4}{x^2 - 5x + 6}$$

Q4) $$f(x) = \frac{x^2 + x}{1 - \sqrt{x+1}}$$

Q5) $f(x) = x \cot x$

Q6) $f(x) = \ln x^2$

Imad Odeh
IO MATHS ACADEMY
MR.IMAD ODEH
12 ADV

(a) Find all values of x at which f is not continuous.
(b) Determine which value in (a) is a removable discontinuity.
(c) Expand $f(x)$ to make it continuous anywhere.

أ) اوجد جميع قيم x التي تكون عندها الدالة f غير متصلة
ب) حدد اي من هذه القيم يكون عندها الانفصال قابل للإزالة
جـ) اوجد الدالة الموسعة والتي تجعل الدالة $f(x)$ متصلة لجميع القيم

Q7) $$f(x) = \frac{3}{\ln x^2}$$

Q8) $$f(x) = x^2 \tan x$$

Q9) $$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{if } x < 1 \\ x^2 & \text{if } x \geq 1 \end{cases}$$

Q10) $$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & \text{if } x \neq 0 \\ 1 & \text{if } x = 0 \end{cases}$$

Q11) $$f(x) = \begin{cases} 3x - 1 & \text{if } x \leq -1 \\ x^2 + 5x & \text{if } -1 < x < 1 \\ 3x^3 & \text{if } x \geq 1 \end{cases}$$

Q12) $$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{if } x \leq 0 \\ \sin x & \text{if } 0 < x \leq \pi \\ x - \pi & \text{if } x > \pi \end{cases}$$

Imad Odeh
Imad Odeh
Imad Odeh
Imad Odeh
Imad Odeh
Imad Odeh
Imad Odeh
Imad Odeh
Imad Odeh
Imad Odeh
Imad Odeh
Imad Odeh
Imad Odeh
Imad Odeh
Imad Odeh
Imad Odeh

ايجاد قيم المجهول إذا علم الاتصال

Q1	Determine the values of a that make the function $f(x)$ continuous at $x = 1$	س1 اوجد قيم a التي تجعل الدالة $f(x)$ متصلة عند $x = 1$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + 2x - 3}{x - 1} & , x \neq 1 \\ a & , x = 1 \end{cases}$$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q2	Determine the values of m that make the function $f(x)$ continuous on $(-\infty, \infty)$	س2 اوجد قيم m التي تجعل الدالة $f(x)$ متصلة على $(-\infty, \infty)$

$$f(x) = \frac{9 - x^2}{mx + 2}$$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q3	Determine the values of n that make the function $f(x)$ continuous at $x = 0$	س3 اوجد قيم n التي تجعل الدالة $f(x)$ متصلة عند $x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - \cos 2x}{6x^2} & , x > 0 \\ n & , x \leq 0 \end{cases}$$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q4	Determine the values of m and n that make the function $f(x)$ continuous at $x = 0$	س4 اوجد قيم n و m التي تجعل الدالة $f(x)$ متصلة عند $x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - mx + 2}{x - 1}, & x \neq 0 \\ n, & x = 0 \end{cases}$$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q5	Determine the values of a and b that make the function $f(x)$ continuous at $x = 0$	س5 اوجد قيم a و b التي تجعل الدالة $f(x)$ متصلة عند $x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2\sin x}{x}, & x < 0 \\ a, & x = 0 \\ b\cos x, & x > 0 \end{cases}$$

Imad Odeh Imad Odeh 12 ADV Imad Odeh Imad Odeh

Q6	Determine the values of a and b that make the function $g(x)$ continuous	س6 اوجد قيم a و b التي تجعل الدالة $f(x)$ متصلة

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{\pi \sin x}{x}, & x < 0 \\ a - bx, & 0 \leq x < 1 \\ \arctan x, & x \geq 1 \end{cases}$$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q7	Determine the values of a and b that make the function $f(x)$ continuous	س7 اوجد قيم a و b التي تجعل الدالة $f(x)$ متصلة

$$f(x)=\begin{cases} a(\tan^{-1}x+2), & x<0 \\ 2e^{bx}+1, & 0\le x\le 3 \\ \ln(x-2)+x^2, & x>3 \end{cases}$$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q8	Determine the values of a and b that make the function $f(x)$ continuous	س8 اوجد قيم a و b التي تجعل الدالة $f(x)$ متصلة

$$f(x)=\begin{cases} ae^{x}+1, & x<0 \\ \sin^{-1}\dfrac{x}{2}, & 0\le x\le 2 \\ x^2-x+b, & x>2 \end{cases}$$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q9	Determine the values of k that make the function $f(x)$ continuous at $x = 0$	س9 اوجد قيم k التي تجعل الدالة $f(x)$ متصلة عند $x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{sinx}{2 - \sqrt{4 + x}} & , \quad x \neq 0 \\ k & , \quad x = 0 \end{cases}$$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q10	Determine the values of a and b that make the function $f(x)$ continuous at $x = 3$	س10 اوجد قيم a و b التي تجعل الدالة $f(x)$ متصلة عند $x = 3$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - ax + 3}{x - 3} & , \quad x \neq 3 \\ bx + 1 & , \quad x = 3 \end{cases}$$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q11	Determine the values of a that make the function $f(x)$ continuous at $x = 1$	س11 اوجد a التي تجعل الدالة $f(x)$ متصلة عند $x = 1$

$$if \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{3x-1}-\sqrt{2x}}{x-1} & , \quad x \neq 1 \\ a & , \quad x = 1 \end{cases}$$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q14	let $h(x)$ is continuous at $x = 2$ where $h(2) = -9$ find	س14 لتكن الدالة $h(x)$ متصلة عند $x = 2$ حيث $h(2) = -9$ اوجد

$$\lim_{x \to 2^-} h(x)$$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q15	If $f(x)$continuous and $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 5$ find	س15 لتكن الدالة $f(x)$ متصلة $\lim_{x \to 2^-} f(x) = 5$ اوجد

$$f(2)$$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Lesson 2-5
النهايات عند المالانهاية وخطوط التقارب
LIMITS INVOLVING INFINITY; ASYMPTOTES.

For any rational number $t > 0$,

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{1}{x^t} = 0$$

Where for the case $x \to -\infty$, we assume that $t = \frac{p}{q}$, *where* q *is odd*

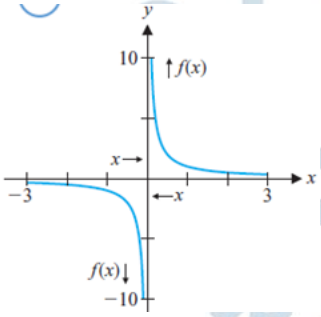
THEOREM 5.2

For a polynomial of degree $n > 0$, $p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$, we have

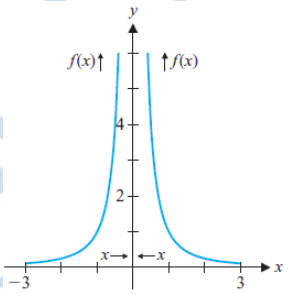
$$\lim_{x\to\infty} p_n(x) = \begin{cases} \infty, & \text{if } a_n > 0 \\ -\infty, & \text{if } a_n < 0 \end{cases}.$$

For

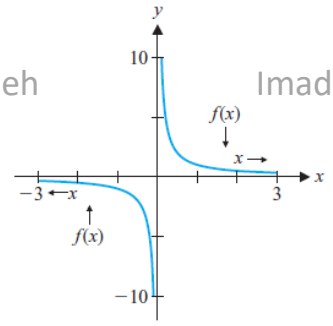
$$\lim_{x\to\infty} \frac{ax^m}{bx^n} \Rightarrow \begin{cases} m < n & \lim_{x\to\infty} \frac{ax^m}{bx^n} = 0 \\ m = n & \lim_{x\to\infty} \frac{ax^m}{bx^n} = \frac{a}{b} \\ m > n & \lim_{x\to\infty} \frac{ax^m}{bx^n} = \infty \end{cases}$$



$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad , \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty$$



$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$



$$\lim_{x\to -\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad , \quad \lim_{x\to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

Evaluate the limit if it exists — اوجد النهاية ان وجدت

Q1) $\lim_{x\to\infty} \frac{5x-7}{4x+3} =$

Q2) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+3x-2}{3x^2+4x-1} =$

Q3) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2-x+1}{4x^2-3x-1}$

Q4) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-1}{4x^3-5x-1} =$

Q5) $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{x^2+3x-5} =$

$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2-3x-2}{4x-3x^2-1}$

Find the constant m — اوجد قيمة الثابت m

Q6) $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^4+mx^4-2x^3-1}{2x^4+2x^3-x} = 4$

Q7) $\lim_{x\to\infty} \frac{mx^3-3x^3-2x^2-5x+1}{2x-5x^3-x} = 2$

Q8) $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^4-5x^4-2x^3-1}{mx^4+2x^3-x} = 4$

Q9)

Imad Odeh

Q9 Find the value of the constant a and n — س9 اوجد قيمة الثابت a و n

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^n+3x^3-8x+5}{3x^5+3x-1}=2$$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Imad Odeh

Q10 Find the constant a — س10 اوجد قيمة الثابت a

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^3-5x^3+1}{x^2+2x^3+5}=10$$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Find the constant k — اوجد قيمة الثابت k

Q11)
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2(3+2kx)}{2+5x-2x^3}=9$$

Imad Odeh Imad Odeh

Q12)
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{3x^2(1+2k|x|)}{2+7x^2-4x^3}=9$$

Imad Odeh Imad Odeh

Q13)
$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2(k|x|-1)}{1-3x^3}=2$$

Imad Odeh Imad Odeh

Q14)
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4(k|x|-1)}{1-2x^5}=5$$

Imad Odeh Imad Odeh

Imad Odeh

Evaluate	اوجد قيمة

Q15) $\lim_{x\to-\infty} \frac{-3x}{\sqrt{x^2+3}}$

Q16) $\lim_{x\to-\infty} \frac{-x}{\sqrt{4+x^2}} =$

Q17) $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{\sqrt{x^2+4}}$

Q18) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{4x^2+6x}}{3x-2}$

Q22	Suppose that the diameter of an animal's pupils is given by $f(x)$ mm, where x is the intensity of light on the pupils. Find the diameter of the pupils with a) Minimum light b) Maximum light	س22 على فرض ان نصف قطر حدقة عين حيوان نعطى بالعلاقة, $f(x)$ mm حيث x تمثل شدة الضوء على الحدقة اوجد نصف قطر الحدقة عندما تكون شدة الضوء أ) اقل ما يمكن ب) أكبر ما يمكن

$$f(x) = \frac{160x^{-0.4} + 90}{4x^{-0.4} + 15}$$

Imad Odeh

مسائل الضرب بالمرافق

Q1 Evaluate	س1 اوجد قيمة

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^2+1} - x$$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q2 Evaluate	س2 اوجد قيمة

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{4x^2-2x+1} - 2x$$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q3 Evaluate	س3 اوجد قيمة

$$\lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt{x^2+1} - x\right)$$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q4 Evaluate س4 اوجد قيمة

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{5x^2+4x+7} - \sqrt{5x^2+x+3}$$

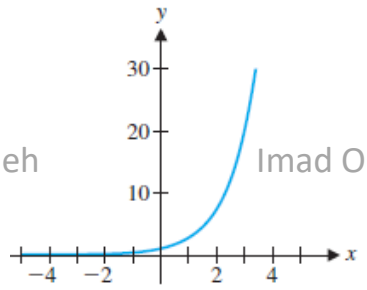
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q5 Evaluate س5 اوجد قيمة

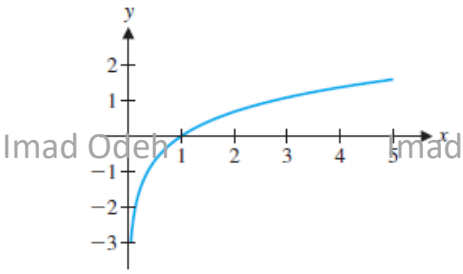
$$\lim_{x\to\infty} \frac{1-cos\left(\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh
Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

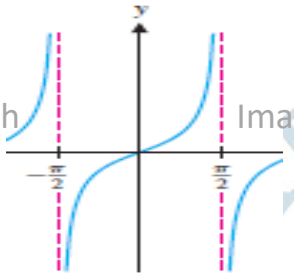
نهاية الدوال المثلثية والعكسية عند المالانهاية



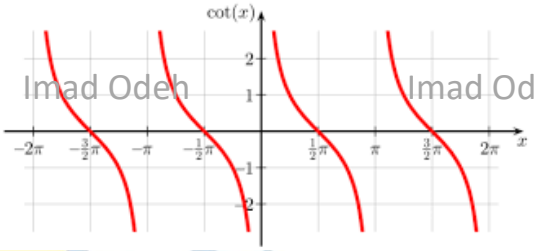
$$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty\,,\ \lim_{x\to-\infty} e^x = o\,,$$



$$\lim_{x\to 0^+} ln\, x = -\infty\,,\ \lim_{x\to\infty} ln\, x = \infty\,,$$

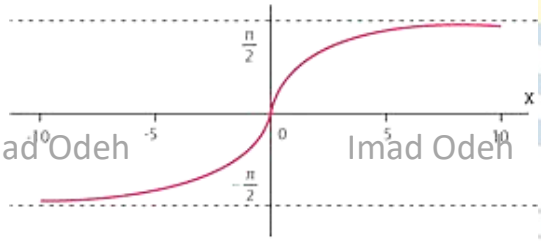


$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} tan\, x = \infty\,,\ \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} tan\, x = -\infty\,,$$



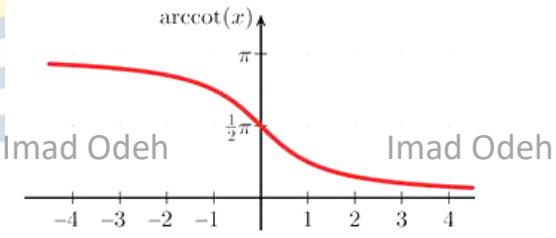
$$\lim_{x\to\pi^-} cot\, x = -\infty\,,\ \lim_{x\to\pi^+} cot\, x = \infty\,,$$

$y = \tan^{-1} x$



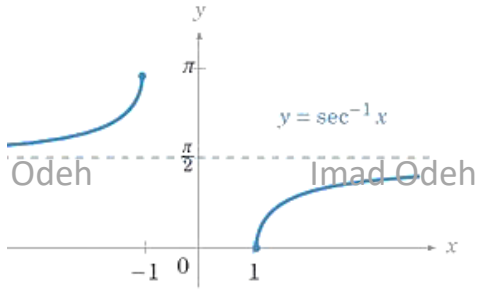
$$\lim_{x\to\infty} \tan^{-1}(x) = \frac{\pi}{2},\quad \lim_{x\to-\infty} \tan^{-1}(x) = -\frac{\pi}{2}$$

$y = \cot^{-1} x$



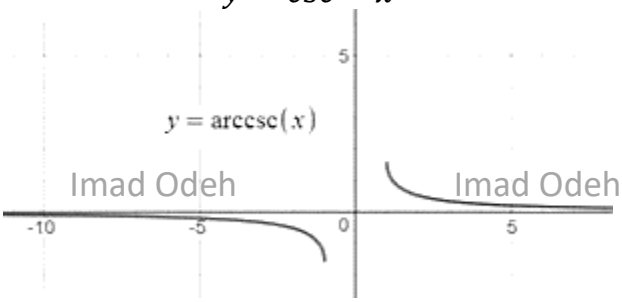
$$\lim_{x\to\infty} \cot^{-1}(x) = 0,\quad \lim_{x\to-\infty} \cot^{-1}(x) = \pi$$

$y = sec^{-1} x$



$$\lim_{x\to\infty} \sec^{-1}(x) = \frac{\pi}{2},\quad \lim_{x\to-\infty} \sec^{-1}(x) = \frac{\pi}{2}$$

$y = csc^{-1} x$



$$\lim_{x\to\infty} \csc^{-1}(x) = 0,\quad \lim_{x\to-\infty} \csc^{-1}(x) = 0$$

Evaluate the limit if it exists — اوجد النهاية ان وجدت

Q1) $\lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{x^2+1}{x-3}\right) =$

Q2) $\lim_{x\to 0^+} ln(x \sin x) =$

Q3) $\lim_{x\to 0^+} e^{-\frac{2}{x^3}} =$

Q4) $\lim_{x\to\infty} e^{-\left(\frac{x+1}{x^2+2}\right)} =$

Q5) $\lim_{x\to\infty} cot^{-1} x =$

Q6) $\lim_{x\to\infty} \sec^{-1}\left(\frac{x^2+1}{x+1}\right) =$

Q7) $\lim_{x\to 0} sin\left(e^{-\frac{1}{x^2}}\right) =$

Q8) $\lim_{x\to\infty} sin\,(\tan^{-1} x) =$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Evaluate the limit if it exists — اوجد النهاية ان وجدت

Q1) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}^-} e^{\tan x}$

Q2) $\lim\limits_{x \to 0^+} \tan^{-1}(\ln x) =$

Q3) $\lim\limits_{x \to \infty} tan^{-1} x$

Q4) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} e^{-tan^2 x}$

Q5) $\lim\limits_{x \to \infty} \tan^{-1}\left(\dfrac{x}{\sqrt{3x^2+4}}\right)$

Q6) $\lim\limits_{x \to 0} sin\,(e^{-\frac{1}{x^2}})$

Q7) $\lim\limits_{x \to \infty} tan^{-1}\left(\dfrac{\sqrt{3x^2+6x}}{x-2}\right)$

Q8) $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \csc^2 x$

Q9) $\lim\limits_{x \to 0} e^{-\cot x}$

Q10) $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{-x^2}$

Imad Odeh

خطوط التقارب
ASYMPTOTES

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

To find vertical asymptote we need to find zeros of the denominator

لإيجاد المقاربات العمودية نبحث في اصفار المقام

To find horizontal asymptote we should follow the next rule

لإيجاد المقاربات الافقية والمائلة نعتمد على القاعدة التالية

عماد عودة عماد عودة عماد عودة

$$y=\frac{ax^m}{bx^n} \Rightarrow \begin{cases} m<n & , \ y=0 \\ m=n & , \ y=\frac{a}{b} \\ m>n & , \ none \end{cases}$$

عماد عودة عماد عودة عماد عودة

أي انه في الحالة الثالثة لا يوجد مقارب افقي ويكون هناك مقارب مائل نقوم بحساب معادلته بالقسمة المطولة

Determine all horizontal and vertical asymptotes.

اوجد جميع المقاربات الافقية والعمودية ان وجدت

Q1) $f(x)=\frac{x}{4-x^2}$

Q2) $f(x)=\frac{x^2}{4-x^2}$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q3) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{4+x^2}}$

Q4) $f(x)=\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Determine all horizontal and vertical asymptotes.

اوجد جميع المقاربات الافقية والعمودية ان وجدت

Q5) $$f(x)=\frac{3x^2+1}{x^2-2x-3}$$

Q6) $$f(x)=\frac{1-x}{x^2+x-2}$$

Q7) $$f(x)=\frac{x+1}{x^2-3x+2}$$

Q8) $$f(x)=\frac{x^2}{x^2-1}$$

Q9) $$f(x)=4tan^{-1}x-2$$

Q10) $$f(x)=ln\,(1-cos\,x)$$

Q11) $$f(x)=\frac{x^3-2}{|x|^3+1}$$

Imad Odeh

المقاربات العمودية والمائلة
Vertical and slant asymptote

Determine all vertical and slant asymptotes. اوجد جميع المقاربات العمودية والمقاربات المائلة

Q1) $$y = \frac{x^3}{4 - x^2}$$

Q2) $$y = \frac{x^3}{x^2 - x - 2}$$

Q3) $$y = \frac{x^3}{x^2 - x - 6}$$

Q4) $$y = \frac{x^2}{4 - x^2}$$

Imad Odeh
Imad Odeh
Imad Odeh

Determine all vertical and slant asymptotes. اوجد جميع المقاربات العمودية والمقاربات المائلة

Q5) $y = \dfrac{x^2+1}{x-2}$

Q6) $y = \dfrac{x^3}{x^2+x-4}$

Q7) $y = \dfrac{x^4}{x^3+2}$

مسائل إضافية

ملاحظة هذا النوع من الاسئلة سيتم حله بطرق اخرى في الوحدة التالية

Find **اوجد قيمة**

Q1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(2+h)^2-4}{h}$

Q2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1+h)^3-1}{h}$

Q3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(2+h)^3-8}{h}$

Imad Odeh

Q4 Find س4 اوجد قيمة

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \quad if \quad f(x)=\sqrt{2x+1}$$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q6 If س6 اوجد قيمة

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-8}{x-2}=7 \text{ find } \lim_{x\to 2}\frac{2x^2-f(x)}{x-2}=$$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

Q7 If س7 اوجد قيمة

$$\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-5}{x-1}=2 \text{ find } \lim_{x\to 1}\frac{5x^2-f(x)}{x-1}=$$

Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh Imad Odeh

اطيب التمنيات للجميع
الأستاذ عماد عودة